Ganit-12(Hindi)

Part-II

विषय-सूची

भाग - II

	आमुख	*iii*
	पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन	*v*
	प्रस्तावना	*vii*
7.	**समाकलन**	**235**
	7.1 भूमिका	235
	7.2 समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में	236
	7.3 समाकलन की विधियाँ	246
	7.4 कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन	254
	7.5 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन	263
	7.6 खंडशः समाकलन	270
	7.7 निश्चित समाकलन	277
	7.8 कलन की आधारभूत प्रमेय	278
	7.9 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना	282
	7.10 निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म	284
8.	**समाकलनों के अनुप्रयोग**	**303**
	8.1 भूमिका	303
	8.2 साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल	303
9.	**अवकल समीकरण**	**311**
	9.1 भूमिका	311
	9.2 आधारभूत संकल्पनाएँ	312
	9.3 अवकल समीकरण का व्यापक एवं विशिष्ट हल	315
	9.4 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ	318

10. सदिश बीजगणित **349**

10.1 भूमिका 349

10.2 कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ 349

10.3 सदिशों के प्रकार 352

10.4 सदिशों का योगफल 354

10.5 एक अदिश से सदिश का गुणन 357

10.6 दो सदिशों का गुणनफल 365

11. त्रि-विमीय ज्यामिति **386**

11.1 भूमिका 386

11.2 रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात 386

11.3 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण 390

11.4 दो रेखाओं के मध्य कोण 392

11.5 दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी 395

12. रैखिक प्रोग्रामन **403**

12.1 भूमिका 403

12.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या और उसका गणितीय सूत्रीकरण 404

13. प्रायिकता **415**

13.1 भूमिका 415

13.2 सप्रतिबंध प्रायिकता 415

13.3 प्रायिकता का गुणन नियम 424

13.4 स्वतंत्र घटनाएँ 426

13.5 बेज़-प्रमेय 433

उत्तरमाला **449**

12082CH07

अध्याय 7

समाकलन Integrals

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. – JAMES B. BRISTOL* ❖

7.1 भूमिका (Introduction)

अवकल गणित अवकलज की संकल्पना पर केंद्रित है। फलनों के आलेखों के लिए स्पर्श रेखाएँ परिभाषित करने की समस्या एवं इस प्रकार की रेखाओं की प्रवणता का परिकलन करना अवकलज के लिए मूल अभिप्रेरण था। समाकलन गणित, फलनों के आलेख से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल को परिभाषित करने एवं इसके क्षेत्रफल का परिकलन करने की समस्या से प्रेरित है।

G .W. Leibnitz (1646–1716)

यदि एक फलन f किसी अंतराल I में अवकलनीय है अर्थात् I के प्रत्येक बिंदु पर फलन के अवकलज f' का अस्तित्व है, तब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि यदि I के प्रत्येक बिंदु पर f' दिया हुआ है तो क्या हम फलन f ज्ञात कर सकते हैं? वे सभी फलन जिनसे हमें एक फलन उनके अवकलज के रूप में प्राप्त हुआ है, इस फलन के प्रतिअवकलज (पूर्वग) कहलाते हैं। अग्रत: वह सूत्र जिससे ये सभी प्रतिअवकलज प्राप्त होते हैं, फलन का अनिश्चित समाकलन कहलाता है और प्रतिअवकलज ज्ञात करने का यह प्रक्रम समाकलन करना कहलाता है। इस प्रकार की समस्याएँ अनेक व्यावहारिक परिस्थितियों में आती हैं। उदाहरणत: यदि हमें किसी क्षण पर किसी वस्तु का तात्क्षणिक वेग ज्ञात है, तो स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि क्या हम किसी क्षण पर उस वस्तु की स्थिति ज्ञात कर सकते हैं? इस प्रकार की अनेक व्यावहारिक एवं सैद्धांतिक परिस्थितियाँ आती हैं, जहाँ समाकलन की संक्रिया निहित होती है। समाकलन गणित का विकास निम्नलिखित प्रकार की समस्याओं के हल करने के प्रयासों का प्रतिफल है।

(a) यदि एक फलन का अवकलज ज्ञात हो, तो उस फलन को ज्ञात करने की समस्या,

(b) निश्चित प्रतिबंधों के अंतर्गत फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या।

उपर्युक्त दोनो समस्याएँ समाकलनों के दो रूपों की ओर प्रेरित करती हैं, अनिश्चित समाकलन एवं निश्चित समाकलन। इन दोनों का सम्मिलित रूप समाकलन गणित कहलाता है।

अनिश्चित समाकलन एवं निश्चित समाकलन के मध्य एक संबंध है जिसे कलन की आधारभूत प्रमेय के रूप में जाना जाता है। यह प्रमेय निश्चित समाकलन को विज्ञान एवं अभियांत्रिकी के लिए एक व्यावहारिक औज़ार के रूप में तैयार करती है। अर्थशास्त्र, वित्त एवं प्रायिकता जैसे विभिन्न क्षेत्रों से अनेक प्रकार की रुचिकर समस्याओं को हल करने के लिए भी निश्चित समाकलन का उपयोग किया जाता है।

इस अध्याय में, हम अपने आपको अनिश्चित एवं निश्चित समाकलनों एवं समाकलन की कुछ विधियों सहित उनके प्रारंभिक गुणधर्मों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे।

7.2 समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में (Integration as the Inverse Process of Differentiation)

अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं। किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने के स्थान पर हमें फलन का अवकलज दिया हुआ है और इसका पूर्वग अर्थात् वास्तविक फलन ज्ञात करने के लिए कहा गया है। यह प्रक्रम समाकलन अथवा प्रति-अवकलन कहलाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें,

हम जानते हैं कि
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \dots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad \dots (2)$$

और
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \dots (3)$$

हम प्रेक्षित करते हैं कि समीकरण (1) में फलन $\cos x$ फलन $\sin x$ का अवकलज है। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज (अथवा समाकलन) $\sin x$ है। इसी प्रकार (2) एवं (3) से x^2 और e^x के प्रतिअवकलज (अथवा समाकलन) क्रमशः $\frac{x^3}{3}$ और e^x है। पुनः हम नोट करते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या C, जिसे अचर फलन माना जाता है, का अवकलज शून्य है, और इसलिए हम (1), (2) और (3) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \text{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \text{C}\right) = x^2 \text{ और } \frac{d}{dx}(e^x + \text{C}) = e^x$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के प्रतिअवकलज अथवा समाकलन अद्वितीय नहीं हैं। वस्तुतः इन फलनों में से प्रत्येक फलन के अपरिमित प्रतिअवकलज हैं, जिन्हें हम वास्तविक

संख्याओं के समुच्चय से स्वेच्छ अचर C को कोई मान प्रदान करके प्राप्त कर सकते हैं। यही कारण है कि C को प्रथानुसार स्वेच्छ अचर कहते हैं। वस्तुत: C एक प्राचल है, जिसके मान को परिवर्तित करके हम दिए हुए फलन के विभिन्न प्रतिअवकलजों या समाकलनों को प्राप्त करते हैं। व्यापकत: यदि एक फलन F ऐसा है कि $\frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \text{I}$ (वास्तविक संख्याओं का अंतराल) तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C, के लिए $\frac{d}{dx}[\text{F}(x) + \text{C}] = f(x)$, $x \in \text{I}$

इस प्रकार $\{\text{F} + \text{C}, \text{C} \in \mathbf{R}\}$, f के प्रतिअवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है, जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है।

टिप्पणी समान अवकलज वाले फलनों में एक अचर का अंतर होता है। इसको दर्शाने के लिए, मान लीजिए g और h ऐसे दो फलन हैं जिनके अवकलज अंतराल I में समान हैं

$f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall\, x \in \text{I}$ द्वारा परिभाषित फलन $f = g - h$ पर विचार कीजिए

तो $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ से $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ $\forall\, x \in \text{I}$ प्राप्त है।

अथवा $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \text{I}$ (परिकल्पना से)

अर्थात् I में x के सापेक्ष f के परिवर्तन की दर शून्य है और इसलिए f एक अचर है।

उपर्युक्त टिप्पणी के अनुसार यह निष्कर्ष निकालना न्यायसंगत है कि परिवार $\{\text{F} + \text{C}, \text{C} \in \mathbf{R}\}$, f के सभी प्रतिअवकलजों को प्रदान करता है।

अब हम एक नए प्रतीक से परिचित होते हैं जो कि प्रतिअवकलजों के पूरे परिवार को निरूपित करेगा। यह प्रतीक $\int f(x)\, dx$ है, इसे x के सापेक्ष f का अनिश्चित समाकलन के रूप में पढ़ा जाता है।

प्रतीकत: हम $\int f(x)\, dx = \text{F}(x) + \text{C}$ लिखते हैं।

संकेतन दिया हुआ है कि $\frac{dy}{dx} = f(x)$, तो हम $y = \int f(x)\, dx$ लिखते हैं।

सुविधा के लिए हम निम्नलिखित प्रतीकों/पदों/वाक्यांशों को उनके अर्थों सहित सारणी 7.1 में उल्लेखित करते हैं:

सारणी 7.1

प्रतीक/पद/वाक्यांश	अर्थ
$\int f(x)\, dx$	f का x के सापेक्ष समाकलन
$\int f(x)\, dx$ में $f(x)$	समाकल्य

$\int f(x)\, dx$ में x	समाकलन का चर
समाकलन करना	समाकलन ज्ञात करना
f का समाकलन	एक फलन F जिसके लिए $F'(x) = f(x)$
समाकलन संक्रिया	समाकलन ज्ञात करने का प्रक्रम
समाकलन का अचर	कोई भी वास्तविक संख्या जिसे अचर फलन कहते हैं।

हम पहले से ही बहुत से प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत हम समाकलन के प्रामाणिक सूत्रों को तुरंत लिख सकते हैं। इन प्रामाणिक सूत्रों की सूची निम्नलिखित हैं जिसका उपयोग हम दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में करेंगे।

अवकलज Derivatives	**समाकलन (प्रतिअवकलज) Integrals (Antiderivatives)**
(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
विशिष्ट रूप में हम देखते हैं	
$\dfrac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + C$
(ii) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
(iii) $\dfrac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
(iv) $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
(v) $\dfrac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$
(vi) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
(vii) $\dfrac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\qquad$ $\int e^x\, dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ $\qquad$ $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

टिप्पणी प्रयोग में हम प्रायः उस अंतराल का जिक्र नहीं करते जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं तथापि किसी भी विशिष्ट प्रश्न के संदर्भ में इसको भी ध्यान में रखना चाहिए।

7.2.1 *अनिश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of indefinite integrals)*

इस उप परिच्छेद में हम अनिश्चित समाकलन के कुछ गुणधर्मों को व्युत्पन्न करेंगे।

(i) निम्नलिखित परिणामों के संदर्भ में अवकलन एवं समाकलन के प्रक्रम एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x)$$

और $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$, जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है।

उपपत्ति मान लीजिए कि F, f का एक प्रतिअवकलज हैं अर्थात्

$$\frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$$

तो $$\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + \text{C}$$

इसलिए $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\text{F}(x)+\text{C}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$$

इसी प्रकार हम देखते हैं कि

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

और इसलिए $$\int f'(x)\,dx = f(x) + \text{C}$$

जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है जिसे समाकलन अचर कहते हैं।

(ii) ऐसे दो अनिश्चित समाकलन जिनके अवकलज समान हैं वक्रों के एक ही परिवार को प्रेरित करते हैं और इस प्रकार समतुल्य हैं।

उपपत्ति मान लीजिए f एवं g ऐसे दो फलन हैं जिनमें

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$$

अत: $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = \text{C}$, जहाँ C एक वास्तविक संख्या है। (क्यों?)

अथवा $$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + \text{C}$$

इसलिए वक्रों के परिवार $\left\{\int f(x)\,dx + \text{C}_1, \text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$

एवं $\left\{\int g(x)\,dx + \text{C}_2, \text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ समतुल्य हैं।

इस प्रकार $\int f(x)\,dx$ और $\int g(x)\,dx$ समतुल्य हैं।

टिप्पणी दो परिवारों $\left\{\int f(x)\,dx + C_1, C_1 \in \mathbf{R}\right\}$ एवं $\left\{\int g(x)\,dx + C_2, C_2 \in \mathbf{R}\right\}$ की समतुल्यता को प्रथानुसार $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$, लिखकर व्यक्त करते हैं जिसमें प्राचल का वर्णन नहीं है।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

उपपत्ति गुणधर्म (i) से

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \ldots (1)$$

अन्यथा हमें ज्ञात है कि

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x) \qquad \ldots (2)$$

इस प्रकार गुणधर्म (ii) के संदर्भ में (1) और (2) से प्राप्त होता है कि

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(iv) किसी वास्तविक संख्या k, के लिए $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

उपपत्ति गुणधर्म (i) द्वारा $\frac{d}{dx}\int k\,f(x)\,dx = k\,f(x)$

और $\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)\,dx\right] = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = k\,f(x)$

इसलिए गुणधर्म (ii) का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(v) प्रगुणों (iii) और (iv) का $f_1, f_2, \ldots, f_n$ फलनों की निश्चित संख्या और वास्तविक संख्याओं k_1, $k_2, \ldots, k_n$ के लिए भी व्यापकीकरण किया जा सकता है जैसा कि नीचे दिया गया है

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx$$

दिए हुए फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात करने के लिए हम अंतर्ज्ञान से ऐसे फलन की खोज करते हैं जिसका अवकलज दिया हुआ फलन है। अभीष्ट फलन की इस प्रकार की खोज, जो दिए हुए फलन के प्रति अवकलज ज्ञात करने के लिए की जाती है, को निरीक्षण द्वारा समाकलन कहते हैं। इसे हम कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 1 निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित फलनों का प्रतिअवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

हल

(i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\cos 2x$ है

हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

अथवा $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

इसलिए $\cos 2x$ का एक प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\sin 2x$ है।

(ii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2 + 4x^3$ है।

अब $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$

इसलिए $3x^2 + 4x^3$ का प्रतिअवकलज $x^3 + x^4$ है।

(iii) हम जानते हैं

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ और } \frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$$

इन दोनों को संघटित करने पर हम पाते हैं $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

इसलिए $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$, जो कि $\frac{1}{x}$ के प्रतिअवकलजों में से एक है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\,dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\,dx$ (iii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x})\,dx$

हल हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\,dx = \int x\,dx - \int x^{-2}\,dx \qquad \text{(गुणधर्म v से)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2\right);$$ C_1, C_2 समाकलन अचर हैं।

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C_1 - C_2$$

$= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x} + C$, जहाँ $C = C_1 - C_2$ एक अन्य समाकलन अचर है।

टिप्पणी इससे आगे हम केवल अंतिम उत्तर में ही, एक समाकलन अचर लिखेंगे।

(ii) यहाँ

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

(iii) यहाँ $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + C$$

उदाहरण 3 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

हल

(i) यहाँ

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + \text{C}$$

(ii) यहाँ

$$\int (\text{cosec}\, x\, (\text{cosec}\, x + \cot x)\, dx = \int \text{cosec}^2 x\, dx + \int \text{cosec}\, x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \text{cosec}\, x + \text{C}$$

(iii) यहाँ

$$\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + \text{C}$$

उदाहरण 4 $f(x) = 4x^3 - 6$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रतिअवकलज F ज्ञात कीजिए जहाँ $\text{F}(0) = 3$ है।

हल $f(x)$ का एक प्रति अवकलज $x^4 - 6x$ है

चूँकि $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$, इसलिए प्रतिअवकलज F,

$\text{F}(x) = x^4 - 6x + \text{C}$, द्वारा देय है जहाँ C अचर है।

दिया हुआ है कि $\text{F}(0) = 3$

इससे प्राप्त होता है $3 = 0 - 6 \times 0 + \text{C}$

अथवा $\text{C} = 3$

अतः अभीष्ट प्रतिअवकलज, $\text{F}(x) = x^4 - 6x + 3$ द्वारा परिभाषित एक अद्वितीय फलन है।

टिप्पणी

(i) हम देखते हैं कि यदि f का प्रतिअवकलज F है तो F + C, जहाँ C एक अचर है, भी f का एक प्रतिअवकलज है। इस प्रकार यदि हमें फलन f का एक प्रतिअवकलज F ज्ञात है तो हम F में कोई भी अचर जोड़कर f के अनंत प्रतिअवकलज लिख सकते हैं जिन्हें $\text{F}(x) + \text{C}$, $\text{C} \in \mathbf{R}$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। अनुप्रयोगों में सामान्यतः एक अतिरिक्त प्रतिबंध को संतुष्ट करना आवश्यक होता है जिससे C का एक विशिष्ट मान प्राप्त होता है और जिसके परिणामस्वरूप दिए हुए फलन का एक अद्वितीय प्रतिअवकलज प्राप्त होता है।

(ii) कभी–कभी F को प्रारंभिक फलनों जैसे कि बहुपद, लघुगणकीय, चर घातांकी, त्रिकोणमितीय, और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय, इत्यादि के रूप में अभिव्यक्त करना असंभव होता है। इसलिए $\int f(x)\,dx$ ज्ञात करना अवरुद्ध हो जाता है। उदाहरणत: निरीक्षण विधि से $\int e^{-x^2}\,dx$ को ज्ञात करना असंभव है क्योंकि निरीक्षण से हम ऐसा फलन ज्ञात नहीं कर सकते जिसका अवकलज e^{-x^2} है।

(iii) यदि समाकल का चर x, के अतिरिक्त अन्य कोई है तो समाकलन के सूत्र तदनुसार रूपांतरित कर लिए जाते हैं। उदाहरणत:

$$\int y^4\,dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}y^5 + C$$

प्रश्नावली 7.1

निम्नलिखित फलनों के प्रतिअवकलज (समाकलन) निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4\,e^{3x}$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

6. $\int (4\,e^{3x} + 1)\,dx$ **7.** $\int x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\,dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\,dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\,dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\,dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\,dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\,dx$ **18.** $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$ **20.** $\int \frac{2 - 3\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

प्रश्न 21 एवं 22 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

21. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज है:

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^{2}+C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22. यदि $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ जिसमें $f(2)=0$ तो $f(x)$ है:

(A) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (B) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

(C) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (D) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

7.3 समाकलन की विधियाँ (Methods of Integration)

पिछले परिच्छेद में हमने ऐसे समाकलनों की चर्चा की थी, जो कुछ फलनों के अवकलजों से सरलतापूर्वक प्राप्त किए जा सकते हैं। यह निरीक्षण पर आधारित विधि थी, इसमें ऐसे फलन F की खोज की जाती है जिसका अवकलज f है इससे f के समाकलन की प्राप्ति होती है। तथापि निरीक्षण पर आधारित यह विधि अनेक फलनों की स्थिति में बहुत उचित नहीं है। अत: समाकलनों को प्रामाणिक रूप में परिवर्तित करते हुए उन्हें ज्ञात करने के लिए हमें अतिरिक्त विधियाँ विकसित करने की आवश्यकता है। इनमें मुख्य विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं:

1. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन
2. आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा समाकलन
3. खंडश: समाकलन

7.3.1 *प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by substitution)*

इस उप परिच्छेद में हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। स्वतंत्र चर x को t में परिवर्तित करने के लिए $x=g(t)$ प्रतिस्थापित करते हुए दिए गए समाकलन $\int f(x)\,dx$ को अन्य रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

$$I=\int f(x)\,dx \text{ पर विचार कीजिए}$$

अब $x = g(t)$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

हम $dx = g'(t)\, dt$ लिखते हैं।

इस प्रकार $\mathrm{I} = \int f(x)\, dx = \int f\{g(t)\}\, g'(t)\, dt$

प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन के लिए यह चर परिवर्तन का सूत्र हमारे पास उपलब्ध एक महत्वपूर्ण साधन है। उपयोगी प्रतिस्थापन क्या होगा इसका अनुमान लगाना हमेशा महत्वपूर्ण है। सामान्यत: हम एक ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\frac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

हल

(i) हम जानते हैं कि mx का अवकलज m है। अत: हम $mx = t$ प्रतिस्थापन करते हैं, ताकि $mdx = dt$

इसलिए $\int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{m}\cos t + \mathrm{C} = -\frac{1}{m}\cos mx + \mathrm{C}$

(ii) $x^2 + 1$ का अवकलज $2x$ है। अत: हम $x^2 + 1 = t$ के प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि $2x\, dx = dt$

इसलिए $\int 2x \sin (x^2 + 1)\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + \mathrm{C} = -\cos (x^2 + 1) + \mathrm{C}$

(iii) $\sqrt{x}$ का अवकलज $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ है। अत: हम

$\sqrt{x} = t$ के प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ जिससे $dx = 2t\, dt$ प्राप्त होता है।

अत: $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\tan^4 t \sec^2 t\, 2t\, dt}{t} = 2\int \tan^4 t\, \sec^2 t\, dt$

फिर से हम दूसरा प्रतिस्थापन $\tan t = u$ करते हैं ताकि $\sec^2 t\, dt = du$

इसलिए $2\int \tan^4 t \sec^2 t\, dt = 2\int u^4\, du = 2\frac{u^5}{5} + C$

$$= \frac{2}{5}\tan^5 t + C \text{ (क्योंकि } u = \tan t)$$

$$= \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C \text{ (क्योंकि } t = \sqrt{x})$$

अतः $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C$

विकल्पतः $\tan \sqrt{x} = t$ प्रतिस्थापन कीजिए

(iv) $\tan^{-1} x$ का अवकलज $\frac{1}{1+x^2}$ है। अतः हम $\tan^{-1} x = t$ प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt$$

इसलिए $\int \frac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos (\tan^{-1} x) + C$

अब हम कुछ महत्वपूर्ण समाकलनों जिनमें त्रिकोणमितीय फलनों और उनके प्रामाणिक समाकलनों का उपयोग प्रतिस्थापन विधि में किया गया है, पर चर्चा करते हैं।

(i) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

हम पाते हैं कि $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\cos x = t$, प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\sin x\, dx = -dt$

तब $\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$

अथवा $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + C$

हम पाते हैं कि $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

$\sin x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\cos x\, dx = dt$

तब $$\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + C$$

$$= \log|\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

हमें ज्ञात है कि, $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$

$\sec x + \tan x = t$ प्रतिस्थापित करने पर $\sec x\,(\tan x + \sec x)\, dx = dt$

इसलिए $\int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

हम पाते हैं कि, $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\, dx$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए
ताकि $-\operatorname{cosec} x\,(\cot x + \operatorname{cosec} x)\, dx = dt$

इसलिए $$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| = -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= -\log\left|\frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\right| + C$$

$$= \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx$ (iii) $\int \frac{1}{1+\tan x}\, dx$

हल

(i) यहाँ $$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $dt = -\sin x\, dx$

इसलिए $\int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x)\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) $x + a = t$ प्रतिस्थापित करने पर $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = \int \frac{\sin (t-a)}{\sin t}\, dt$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}\, dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a)\left[\log |\sin t| + C_1\right]$$

$$= (\cos a)\,(x+a) - (\sin a)\left[\log |\sin (x+a)| + C_1\right]$$

$$= x \cos a + a \cos a - (\sin a) \log |\sin (x+a)| - C_1 \sin a$$

अतः $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = x \cos a - \sin a \log |\sin (x+a)| + C$

जहाँ $C = -C_1 \sin a + a \cos a$, एक अन्य स्वेच्छ अचर है।

(iii) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \ldots (1)$$

अब $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ पर विचार कीजिए।

अब $\quad \cos x + \sin x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

इसलिए $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_2 = \log|\cos x + \sin x| + C_2$

I को (1) में रखने पर हम पाते हैं

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

प्रश्नावली 7.2

1 से 37 तक के प्रश्नों में प्रत्येक फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

4. $\sin x \sin(\cos x)$ **5.** $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$ **22.** $\sec^2(7-4x)$ **23.** $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1 - \tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1 + \cot x}$

33. $\dfrac{1}{1 - \tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\dfrac{(1 + \log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)\left(x + \log x\right)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3 \sin\left(\tan^{-1} x^4\right)}{1 + x^8}$

प्रश्न 38 एवं 39 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

38. $\displaystyle\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10}\, dx}{x^{10} + 10^x}$ बराबर है:

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log\,(10^x + x^{10}) + C$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है:

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 *त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के उपयोग द्वारा समाकलन (Integration using trigonometric identities)*

जब समाकल्य में कुछ त्रिकोणमितीय फलन निहित होते हैं, तो हम समाकलन ज्ञात करने के लिए कुछ ज्ञात सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हैं जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों के द्वारा समझाया गया है।

उदाहरण 7 निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए

(i) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$

हल

(i) सर्वसमिका $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ को स्मरण कीजिए जिससे

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$ प्राप्त होता है।

इसलिए $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) सर्वसमिका $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin (x+y) + \sin (x-y)]$, को स्मरण कीजिए

तब $\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) सर्वसमिका $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ से हम पाते हैं कि

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

इसलिए $\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

विकल्पत: $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ रखने पर $-\sin x\, dx = dt$

इसलिए $\int \sin^3 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

टिप्पणी त्रिकोणमितीय सर्व–समिकाओं का उपयोग करते हुए यह दर्शाया जा सकता है कि दोनों उत्तर समतुल्य हैं।

प्रश्नावली 7.3

1 से 22 तक के प्रश्नों में प्रत्येक फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\sin^2 (2x+5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3 (2x+1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1}(\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

प्रश्न 23 एवं 24 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

23. $\int \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ बराबर है:

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\int \dfrac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ बराबर है:

(A) $-\cot(ex^x) + C$ (B) $\tan(xe^x) + C$

(C) $\tan(e^x) + C$ (D) $\cot(e^x) + C$

7.4 कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन (Integrals of Some Particular Functions)

इस परिच्छेद में हम निम्नलिखित महत्वपूर्ण समाकलन सूत्रों की व्याख्या करेंगे और बहुत से दूसरे संबंधित प्रामाणिक समाकलनों को ज्ञात करने में उनका प्रयोग करेंगे।

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ **(2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ **(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ **(6)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

अब हम उपर्युक्त परिणामों को सिद्ध करते हैं।

(1) हम जानते हैं कि $\displaystyle\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

इसलिए $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) उपर्युक्त (1) के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

इसलिए $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\log|a-x| + \log|a+x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

टिप्पणी (1) में उपयोग की गई विधि की व्याख्या परिच्छेद 7.5 में की जाएगी।

(3) $x = a\tan\theta$ रखने पर $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

इसलिए $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2}$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) मान लीजिए $x = a\sec\theta$ तब $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \text{ जहाँ } C = C_1 - \log|a|$$

(5) मान लीजिए कि $x = a\sin\theta$ तब $dx = a\cos\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(6) मान लीजिए कि $x = a\tan\theta$ तब $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log|(\sec\theta + \tan\theta)| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \text{ जहाँ } C = C_1 - \log|a|$$

इन प्रामाणिक सूत्रों के प्रयोग से अब हम कुछ और सूत्र प्राप्त करते हैं जो अनुप्रयोग की दृष्टि से उपयोगी हैं और दूसरे समाकलनों का मान ज्ञात करने के लिए इनका सीधा प्रयोग किया जा सकता है।

(7) समाकलन $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ज्ञात करने के लिए हम

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$ लिखते हैं।

अब $x + \frac{b}{2a} = t$ रखने पर $dx = dt$ एवं $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ लिखते हुए हम पाते हैं कि $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ के चिह्न पर निर्भर करते हुए यह समाकलन $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है और इस प्रकार इसका मान ज्ञात किया जा सकता है।

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, के प्रकार के समाकलन को ज्ञात करने के लिए (7) की भाँति आगे बढ़ते हुए प्रामाणिक सूत्रों का उपयोग करके समाकलन ज्ञात किया जा सकता है।

(9) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$, जहाँ p, q, a, b, c अचर हैं, के प्रकार के समाकलन ज्ञात करने के लिए हम ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ A तथा B ज्ञात करते हैं ताकि

$$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax + b) + \mathrm{B}$$

A तथा B, ज्ञात करने के लिए हम दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करते हैं। A तथा B के ज्ञात हो जाने पर समाकलन ज्ञात प्रामाणिक रूप में परिवर्तित हो जाता है।

(10) $\int \frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, के प्रकार के समाकलन का मान ज्ञात करने के लिए हम (9) की भाँति आगे बढ़ते हैं और समाकलन को ज्ञात प्रामाणिक रूपों में परिवर्तित करते हैं।

आइए उपर्युक्त विधियों को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझते हैं।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

हल

(i) यहाँ $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4 (1) से]

(ii) $\int \frac{dx}{2x-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$x - 1 = t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$ [7.4 (5) से]

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

उदाहरण 9 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

हल

(i) यहाँ $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13 = (x-3)^2 + 4$

इसलिए $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

मान लीजिए $x - 3 = t$ तब $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$ [7.4 (3) से]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$$

(ii) दिया हुआ समाकलन 7.4(7) के रूप का है। हम समाकल्य के हर को निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2\right] \quad \text{(पूर्ण वर्ग बनाने पर)}$$

इसलिए $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$

अब $x+\frac{13}{6}=t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3\times 2\times \frac{17}{6}} \log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right| + C_1 \qquad \text{[7.4 (i) से]}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right| + C_1 = \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C, \text{ where } C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) यहाँ $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}} \quad \text{(पूर्ण वर्ग बनाने पर)}$$

अब $x-\frac{1}{5}=t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \qquad [7.4\ (4)\ \text{से}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

उदाहरण 10 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

हल

(i) सूत्र 7.4(9) का उपयोग करते हुए हम अभिव्यक्त करते हैं

$$x + 2 = A \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 6x + 5\right) + B = A\,(4x + 6) + B$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करने पर हम पाते हैं:

$$4A = 1 \text{ तथा } 6A + B = 2 \quad \text{अथवा} \quad A = \frac{1}{4} \text{ और } B = \frac{1}{2}$$

इसलिए $$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \quad \text{(मान लीजिए)} \qquad \ldots (1)$$

I_1 में, $2x^2 + 6x + 5 = t$, रखने पर $(4x + 6)\,dx = dt$

इसलिए $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1 = \log|2x^2 + 6x + 5| + C_1 \qquad \ldots (2)$$

और $$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

अब $x + \frac{3}{2} = t$, रखने पर $dx = dt$, हम पाते हैं

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} 2t + C_2 \qquad [7.4\ (3)\ \text{से}]$$

$$= \tan^{-1} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2 = \tan^{-1}(2x+3) + C_2 \qquad \ldots (3)$$

(2) और (3) का उपयोग (1) में करने पर हम पाते हैं

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\, dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3) + C,$$

जहाँ $\quad C = \frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2}$

(ii) यह समाकलन 7.4 (10) के रूप में है। आइए $x+3$ को निम्नलिखित रूप में अभिव्यक्त करते हैं

$$x + 3 = A\frac{d}{dx}(5 - 4x - x^2) + B = A(-4 - 2x) + B$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करने पर हम पाते हैं

$-2A = 1$ और $-4A + B = 3$,

अर्थात् $\quad A = -\frac{1}{2}$ और $B = 1$

इसलिए $\quad \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\, dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$= -\frac{1}{2} I_1 + I_2 \qquad \ldots (1)$$

I_1, में $5 - 4x - x^2 = t$, रखने पर $(-4 - 2x)\, dx = dt$

इसलिए $\quad I_1 = \int \frac{(-4-2x)\, dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C_1$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + C_1 \qquad \ldots (2)$$

अब $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$ पर विचार कीजिए

$x + 2 = t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $\quad I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + C_2$ [7.4 (5) से]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C_2 \quad \ldots (3)$$

समीकरणों (2) एवं (3) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम

$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C$ प्राप्त करते हैं, जहाँ $C = C_2 - \frac{C_1}{2}$

प्रश्नावली 7.4

प्रश्न 1 से 23 तक के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

प्रश्न 24 एवं 25 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

24. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ बराबर है :

(A) $x \tan^{-1}(x+1)+C$ (B) $\tan^{-1}(x+1)+C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x+C$ (D) $\tan^{-1}x+C$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

स्मरण कीजिए कि एक परिमेय फलन $\frac{P(x)}{Q(x)}$, दो बहुपदों के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ $P(x)$ एवं $Q(x)$, x में बहुपद हैं तथा $Q(x) \neq 0$. यदि $P(x)$ की घात $Q(x)$ की घात से कम है, तो परिमेय फलन उचित परिमेय फलन कहलाता है अन्यथा विषम परिमेय फलन कहलाता है। विषम परिमेय फलनों को लम्बी भाग विधि द्वारा उचित परिमेय फलन के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। इस प्रकार यदि $\frac{P(x)}{Q(x)}$ विषम परिमेय फलन है, तो $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, जहाँ $T(x)$ x में एक बहुपद है और $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है। हम जानते हैं कि एक बहुपद का समाकलन कैसे किया जाता है, अतः किसी भी परिमेय फलन का समाकलन किसी उचित परिमेय फलन के समाकलन की समस्या के रूप में परिवर्तित हो जाता है। यहाँ पर हम जिन परिमेय फलनों के समाकलन पर विचार करेंगे, उनके हर रैखिक और द्विघात गुणनखंडों में विघटित होने वाले होंगे।

मान लीजिए कि हम $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ का मान ज्ञात करना चाहते हैं जहाँ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है। एक विधि, जिसे आंशिक भिन्नों में वियोजन के नाम से जाना जाता है, की सहायता से दिए हुए समाकल्य को साधारण परिमेय फलनों के योग के रूप मे लिखा जाना संभव है। इसके पश्चात् पूर्व ज्ञात विधियों की सहायता से समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सकता है। निम्नलिखित सारणी 7.2 निर्दिष्ट करती है, कि विभिन्न प्रकार के परिमेय फलनों के साथ किस प्रकार के सरल आंशिक भिन्नों को संबद्ध किया जा सकता है।

सारणी 7.2

क्रमांक	परिमेय फलन का रूप	आंशिक भिन्नों का रूप
1.	$\dfrac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$
2.	$\dfrac{px+q}{(x-a)^2}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$
4.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}$
5.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$ जहाँ $x^2 + bx + c$ का और आगे गुणनखंड नहीं किया जा सकता।	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

उपर्युक्त सारणी में A, B एवं C वास्तविक संख्याएँ हैं जिनको उचित विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 11 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य एक उचित परिमेय फलन है इसलिए आंशिक भिन्नों के रूप [सारणी 7.2 (i)], का उपयोग करते हुए, हम

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}, \text{ लिखते हैं} \qquad \ldots (1)$$

जहाँ A और B वास्तविक संख्याएँ हैं जिनको हमें उचित विधि से ज्ञात करना है। हम पाते हैं

$$1 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

x के गुणांकों एवं अचर पदों को समान करने पर हम पाते हैं

$$A + B = 0$$

एवं

$$2A + B = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें $A = 1$ और $B = -1$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-1}{x+2}$

इसलिए $$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

टिप्पणी उपर्युक्त समीकरण (1) एक सर्वसमिका है अर्थात् एक ऐसा कथन जो x के सभी स्वीकार्य सभी मानों के लिए सत्य है। कुछ लेखक संकेत $\equiv$ का उपयोग यह दर्शाने के लिए करते हैं कि दिया हुआ कथन एक सर्वसमिका है और संकेत $=$ का उपयोग यह दर्शाने के लिए करते हैं कि दिया हुआ कथन एक समीकरण है अर्थात् यह दर्शाने के लिए कि दिया हुआ कथन x के निश्चित मानों के लिए सत्य है।

उदाहरण 12 $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ समाकल्य $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ एक उचित परिमेय फलन नहीं है इसलिए हम $x^2 + 1$ को $x^2 - 5x + 6$ से भाग करते हैं और हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

मान लीजिए कि $$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

ताकि $$5x - 5 = A(x-3) + B(x-2)$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचर पदों को समान करने पर हम पाते हैं $A + B = 5$ और $3A + 2B = 5$.

इन समीकरणों को हल करने पर हम

$A = -5$ और $B = 10$ प्राप्त करते हैं।

अत: $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

इसलिए $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C$$

उदाहरण 13 $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य सारणी 7.2(4) में दिए हुए समाकल्य के रूप का है। अतः हम

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3} \text{ लिखते हैं}$$

ताकि $3x - 2 = A(x + 1)(x + 3) + B(x + 3) + C(x + 1)^2$

$$= A(x^2 + 4x + 3) + B(x + 3) + C(x^2 + 2x + 1)$$

दोनों पक्षों से x^2 के गुणांकों, x के गुणांकों एव अचर पदों की तुलना करने पर पाते हैं कि $A + C = 0$, $4A + B + 2C = 3$ और $3A + 3B + C = -2$ इन समीकरणों को हल करने पर हम $A = \frac{11}{4}, B = \frac{-5}{2}$ और $C = \frac{-11}{4}$ पाते हैं। इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

इसलिए
$$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

उदाहरण 14 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ को लीजिए और $x^2 = y$ रखिए

तब
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} \text{ के रूप में लिखिए}$$

ताकि
$$y = A(y + 4) + B(y + 1)$$

दोनों पक्षों से y के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम पाते हैं $A + B = 1$ और $4A + B = 0$, जिससे प्राप्त होता है

$$A = -\frac{1}{3} \quad \text{और} \quad B = \frac{4}{3}$$

अतः $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

इसलिए $$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

उपर्युक्त उदाहरण में केवल आंशिक भिन्न वाले भाग के लिए प्रतिस्थापन किया गया था न कि समाकलन वाले भाग के लिए। अब हम एक ऐसे उदाहरण की चर्चा करते हैं जिसमें समाकलन के लिए प्रतिस्थापन विधि एवं आंशिक भिन्न विधि दोनों को संयुक्त रूप से प्रयुक्त किया गया है।

उदाहरण 15 $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \sin\phi$

तब $$dy = \cos\phi\; d\phi$$

इसलिए $$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\, dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\, dy = \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = I \qquad \text{(मान लीजिए)}$$

अब हम $$\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{(y-2)^2}$$ लिखते हैं [सारणी 7.2 (2) से]

इसलिए $3y - 2 = A(y-2) + B$

दोनों पक्षों से y के गुणांक एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम पाते हैं, $A = 3$ एवं $B - 2A = -2$, जिससे हमें $A = 3$ एवं $B = 4$ प्राप्त होता है।

इसलिए अभीष्ट समाकलन निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$I = \int [\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}]\, dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|\,y-2\,| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + C = 3\log|\,\sin\phi - 2\,| + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$

$$= 3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + C \text{ (क्योंकि } 2-\sin\phi \text{ हमेशा धनात्मक है)}$$

उदाहरण 16 $\int \frac{x^2+x+1\, dx}{(x+2)(x^2+1)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य एक उचित परिमेय फलन है। परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों में विघटित करते हैं [सारणी 2.2(5)]।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

इसलिए $x^2 + x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)$

दोनों पक्षों से x^2 के गुणांकों, x के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम $A + B = 1$, $2B + C = 1$ और $A + 2C = 1$ प्राप्त करते हैं।

इन समीकरणों को हल करने पर हम $A = \frac{3}{5}, B = \frac{2}{5}, C = \frac{1}{5}$ पाते हैं।

इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

इसलिए $$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}\, dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|\,x+2\,| + \frac{1}{5}\log|\,x^2+1\,| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

प्रश्नावली 7.5

1 से 21 तक के प्रश्नों में परिमेय फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\dfrac{1}{x^2-9}$ **3.** $\dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$

6. $\dfrac{1-x^2}{x(1-2x)}$ **7.** $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

9. $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ **10.** $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

12. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ **13.** $\dfrac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2}$

15. $\dfrac{1}{x^4-1}$ **16.** $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ [संकेत: अंश एवं हर को x^{n-1} से गुणा कीजिए और $x^n = t$ रखिए]

17. $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [संकेत: $\sin x = t$ रखिए]

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [संकेत: $e^x = t$ रखिए]

प्रश्न 22 एवं 23 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

22. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ बराबर है :

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right|+C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right|+C$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right|+C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)|+C$

23. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ बराबर है :

(A) $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (B) $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(C) $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (D) $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

7.6 खंडशः समाकलन (Integration by Parts)

इस परिच्छेद में हम समाकलन की एक और विधि की चर्चा करेंगे जो कि दो फलनों के गुणनफल का समाकलन करने में बहुत उपयोगी है।

यदि एकल चर x (मान लीजिए) में u और v दो अवकलनीय फलन है तो अवकलन के गुणनफल नियम के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

अथवा $$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \qquad \text{... (1)}$$

मान लीजिए कि $u = f(x)$ और $\frac{dv}{dx} = g(x)$ तब

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ और } v = \int g(x)\,dx$$

इसलिए समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int\left[\int g(x)\,dx\, f'(x)\right]dx$$

अर्थात् $$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int\left[f'(x)\int g(x)\,dx\right]dx$$

यदि हम f को प्रथम फलन और g को दूसरा फलन मान लें तो इस सूत्र को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

"दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = (प्रथम फलन) × (द्वितीय फलन का समाकलन) — [(प्रथम फलन का अवकलन गुणांक) × (द्वितीय फलन का समाकलन)] का समाकलन"

उदाहरण 17 $\int x\cos x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(x) = x$ (प्रथम फलन) और $g(x) = \cos x$ (द्वितीय फलन) रखिए। तब खंडशः समाकलन से प्राप्त होता है कि

$$\int x\cos x\,dx = x\int \cos x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\,dx\right]dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

मान लीजिए कि हम $f(x) = \cos x$ एवं $g(x) = x$ लेते हैं तब

$$\int x\cos x\,dx = \cos x\int x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\cos x)\int x\,dx\right]dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x\,\frac{x^2}{2}\,dx$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि समाकलन $\int x\cos x\,dx$, तुलनात्मक दृष्टि से x की अधिक घात वाले अधिक कठिन समाकलन में परिवर्तित हो जाता है। इसलिए प्रथम फलन एवं द्वितीय फलन का उचित चयन महत्वपूर्ण है।

टिप्पणी

1. यह वर्णनीय हैं, कि खंडशः समाकलन दो फलनों के गुणनफल की सभी स्थितियों में प्रयुक्त नहीं है, उदाहरणतया $\int \sqrt{x}\sin x\,dx$ की स्थिति में यह विधि काम नहीं करती है। इसका कारण यह है कि ऐसा कोई फलन अस्तित्व मे ही नहीं है जिसका अवकलज $\sqrt{x}\ \sin x$ है।
2. ध्यान दीजिए कि द्वितीय फलन का समाकलन ज्ञात करते समय हमने कोई समाकलन अचर नहीं जोड़ा था। यदि हम द्वितीय फलन $\cos x$ के समाकलन को $\sin x + k$, के रूप में लिखते हैं, जहाँ k कोई अचर है, तब

$$\int x\cos x\,dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\,dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x\,dx - \int k\,dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + C = x\sin x + \cos x + C$$

   यह दर्शाता है कि खंडशः समाकलन विधि के प्रयोग से अंतिम परिणाम ज्ञात करने के लिए द्वितीय फलन के समाकलन में अचर का जोड़ना व्यर्थ है।

3. सामान्यतः यदि कोई फलन x की घात के रूप में है अथवा x का बहुपद है तो हम इसे प्रथम फलन के रूप मे लेते हैं। तथापि ऐसी स्थिति में जहाँ दूसरा फलन प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अथवा लघुगणकीय फलन है, तो हम उनको प्रथम फलन के रूप मे लेते हैं।

उदाहरण 18 $\int \log x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल प्रारम्भ करने के लिए हम ऐसे फलन का अनुमान लगाने में असमर्थ हैं जिसका अवकलज $\log x$ है। हम $\log x$ को प्रथम फलन एवं अचर फलन 1 को द्वितीय फलन लेते हैं। दूसरे फलन का समाकलन x है।

अतः
$$\int (\log x \cdot 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$
$$= \log x \,.\, x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log x - x + C$$

उदाहरण 19 $\int x\, e^x dx$ ज्ञात कीजिए।

हल x प्रथम फलन एवं e^x को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए

दूसरे फलन का समाकलन $= e^x$

इसलिए $\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int 1 \,.\, e^x dx = xe^x - e^x + C$

उदाहरण 20 $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए प्रथम फलन $= \sin^{-1} x$, और द्वितीय फलन $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1.088 mm

अब हम द्वितीय फलन का समाकलन ज्ञात करते हैं अर्थात् $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ज्ञात करते हैं।

$t = 1 - x^2$ रखिए

तब $dt = -\, 2x\, dx$

इसलिए
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

अतः
$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x \left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + C$$

विकल्पतः $\sin^{-1} x = \theta$ प्रतिस्थापित करने पर और तब खंडशः समाकलन का उपयोग करते हुए भी इस समाकलन को हल किया जा सकता है।

उदाहरण 21 $\int e^x \sin x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल e^x को प्रथम फलन एवं $\sin x$ को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए। तब खंडशः समाकलन से हम पाते हैं कि

$$I = \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (मान लीजिए)} \qquad \ldots (1)$$

I_1 में e^x एवं $\cos x$ को क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय फलन मानते हुए हम पाते हैं कि

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

I_1 का मान (1) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ अथवा } 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

अतः $$I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

विकल्पतः $\sin x$ को प्रथम फलन एवं e^x को द्वितीय फलन लेने पर भी उपर्युक्त समाकलन को ज्ञात किया जा सकता है।

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ के प्रकार का समाकलन

हमें ज्ञात है कि $$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= I_1 + \int e^x f'(x)\, dx, \text{ जहाँ } I_1 = \int e^x f(x)\, dx \qquad \ldots (1)$$

I_1 में $f(x)$ एवं e^x को क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय फलन लेते हुए एवं खंडशः समाकलन द्वारा हम पाते हैं $I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x dx + C$

I_1 को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

अतः $$\int e^x \left(f(x) + f'(x)\right) dx = e^x f(x) + C$$

उदाहरण 22 ज्ञात कीजिए

(i) $\int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

हल

(i) यहाँ $I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

अब $f(x) = \tan^{-1} x$, लीजिए, तब $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

अतः दिया हुआ समाकल्य $e^x [f(x) + f'(x)]$ के रूप में है।

इसलिए $\quad I = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx \; = e^x \tan^{-1}x + C$

(ii) मान लीजिए कि $\quad I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x [\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}]\, dx$

$$= \int e^x [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx \; = \int e^x [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

मान लीजिए कि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ तब $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

अतः दिया हुआ समाकल्य $e^x [f(x) + f'(x)]$ के रूप में है।

इसलिए $\quad \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + C$

प्रश्नावली 7.6

1 से 22 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1}x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x \cos^{-1} x$ **10.** $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2 + 1) \log x$

16. $e^x (\sin x + \cos x)$ **17.** $\frac{x e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\frac{(x-3)\, e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x} \sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

प्रश्न 23 एवं 24 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

23. $\int x^2 e^{x^3} dx$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$ (B) $\frac{1}{3} e^{x^2} + C$

(C) $\frac{1}{2} e^{x^3} + C$ (D) $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

24. $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ बराबर है:

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sec x + C$

(C) $e^x \sin x + C$ (D) $e^x \tan x + C$

7.6.2 कुछ अन्य प्रकार के समाकलन (*Integrals of some more types*)

यहाँ हम खंडशः समाकलन विधि पर आधारित कुछ विशिष्ट प्रकार के प्रामाणिक समाकलनों की चर्चा करेंगे। जैसे कि

(i) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) मान लीजिए कि $I=\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

अचर फलन 1 को द्वितीय फलन मानते हुए और खंडशः समाकलन द्वारा हम पाते हैं

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

अथवा $$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

अथवा $$I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

इसी प्रकार दूसरे दो समाकलनों में अचर फलन 1 को द्वितीय फलन लेकर एवं खंडशः समाकलन विधि द्वारा हम पाते हैं

(ii) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

विकल्पतः समाकलनों (i), (ii) एवं (iii) में क्रमशः $x = a\sec\theta$, $x = a\tan\theta$ और $x = a\sin\theta$, प्रतिस्थापन करने पर भी इन समाकलनों को ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 23 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\, dx$

अब $x + 1 = y$ रखने पर $dx = dy$, तब

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{y^2+2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{y^2+4} + \frac{4}{2} \log \left| y + \sqrt{y^2+4} \right| + C \quad \text{[7.6.2 (ii)के उपयोग से]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\log \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+5} \right| + C$$

उदाहरण 24 $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\, dx$

अब $x + 1 = y$ रखने पर $dx = dy$

इस प्रकार $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-y^2}\, dy$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} + C \quad \text{[7.6.2 (iii)के उपयोग से]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

प्रश्नावली 7.7

1 से 9 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

प्रश्न 10 एवं 11 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|+C$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$

11. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx$ बराबर है

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

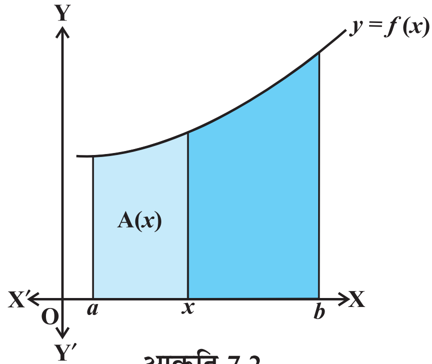
7.7 निश्चित समाकलन (Definite Integral)

पिछले परिच्छेदों में हमने अनिश्चित समाकलनों के बारे में अध्ययन किया है और कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलनों सहित अनिश्चित समाकलनों को ज्ञात करने की कुछ विधियों पर चर्चा की है। इस परिच्छेद में हम किसी फलन के निश्चित समाकलन का अध्ययन करेंगे। निश्चित समाकलन का एक अद्वितीय मान होता है। एक निश्चित समाकलन को $\int_a^b f(x)\, dx$, से निर्दिष्ट किया जाता है जहाँ b, समाकलन की उच्च सीमा तथा a, समाकलन की निम्न सीमा कहलाती हैं। निश्चित समाकलन का परिचय, या तो योगों की सीमा के रूप में कराया जाता है अथवा यदि अंतराल $[a, b]$ में इसका कोई प्रतिअवकलज F है तो निश्चित समाकलन का मान अंतिम बिंदुओं पर F के मानों के अंतर अर्थात् $F(b) - F(a)$ के बराबर होता है, के रूप में कराया जाता है। निश्चित समाकलन के इन दोनों रूपों की हम अलग-अलग चर्चा करेंगे।

7.8 कलन की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Calculus)

7.8.1 *क्षेत्रफल फलन (Area function)*

हमने $\int_a^b f(x)\,dx$ को वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष, एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किया है। मान लीजिए $[a, b]$ में x कोई बिंदु है तब $\int_a^x f(x)\,dx$ आकृति 7.2 में हल्का छायांकित क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है [यहाँ यह मान लिया गया है कि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) > 0$ है। निम्नलिखित कथन सामान्यत: अन्य फलनों के लिए भी सत्य है। इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x के मान पर निर्भर है।



आकृति 7.2

दूसरे शब्दों में इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x का एक फलन है। हम x के इस फलन को $A(x)$ से निर्दिष्ट करते हैं। इस फलन $A(x)$ को हम क्षेत्रफल फलन कहते हैं और यह हमें निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\mathbf{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

इस परिभाषा पर आधारित दो आधारभूत प्रमेय हैं। तथापि हम यहाँ पर केवल इनकी व्याख्या करेंगे क्योंकि इनकी उपपत्ति इस पाठ्यपुस्तक की सीमा के बाहर है।

7.8.2 *प्रमेय 1 समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय (First fundamental theorem of integral calculus)*

मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक संतत फलन है और $A(x)$ क्षेत्रफल फलन है। तब सभी $x \in [a, b]$ के लिए $A'(x) = f(x)$

7.8.3 *समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय (Second fundamental theorem of integral calculus)*

हम नीचे एक ऐसे महत्वपूर्ण प्रमेय की व्याख्या करते हैं जिसकी सहायता से हम प्रतिअवकलज का उपयोग करते हुए निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करते हैं।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक संतत फलन है और f का प्रतिअवकलज F है। तब $\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

टिप्पणी

1. शब्दों में हम प्रमेय 2 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि $\int_a^b f(x)\,dx =$ (f के प्रति अवकलज F का उच्च सीमा b पर मान) – (उसी प्रति अवकलज का निम्न सीमा a पर मान)।

2. यह प्रमेय अत्यंत उपयोगी है क्योंकि यह हमें योगफल की सीमा ज्ञात किए बिना निश्चित समाकलन को ज्ञात करने की आसान विधि प्रदान करती है।

3. एक निश्चित समाकलन ज्ञात करने में जटिल संक्रिया एक ऐसे फलन का प्राप्त करना है जिसका अवकलज दिया गया समाकल्य है। यह अवकलन और समाकलन के बीच संबंध को और मजबूत करता है।

4. $\int_a^b f(x)\, dx$ में, $[a, b]$ पर फलन f का सुपरिभाषित एवं संतत होना आवश्यक है। उदाहरणत: निश्चित समाकलन $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\, dx$ की चर्चा करना भ्रांतिमूलक हैं क्योंकि बंद अंतराल $[-2, 3]$ के भाग $-1 < x < 1$ के लिए $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ द्वारा अभिव्यक्त फलन f परिभाषित नही है। $\int_a^b f(x)\, dx$ ज्ञात करने के चरण (**Steps for calculating** $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\, dx}$)

(i) अनिश्चित समाकलन $\int f(x)\, dx$ ज्ञात कीजिए। मान लीजिए यह $\mathrm{F}(x)$ है। समाकलन अचर C को लेने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि हम $\mathrm{F}(x)$ के स्थान पर $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ पर विचार करें तो पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]_a^b = [\mathrm{F}(b) + \mathrm{C}] - [\mathrm{F}(a) + \mathrm{C}] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

इस प्रकार निश्चित समाकलन का मान ज्ञात करने में स्वेच्छ अचर विलुप्त हो जाता है।

(ii) $[\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ज्ञात कीजिए, जो कि $\int_a^b f(x)\, dx$ का मान है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 25 निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_2^3 x^2\, dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)}$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$

हल

(i) मान लीजिए $\mathrm{I} = \int_2^3 x^2\, dx$ है। क्योंकि $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} = \mathrm{F}(x)$

इसलिए द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2} dx$ सर्वप्रथम हम समाकल्य का प्रतिअवकलज ज्ञात करते हैं।

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ रखने पर $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = dt$ अथवा $\sqrt{x}\, dx = -\frac{2}{3} dt$

इस प्रकार $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2} dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right] = \mathrm{F}(x)$

इसलिए कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं:

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(9) - \mathrm{F}(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) मान लीजिए $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)}$

आंशिक भिन्न का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

इसलिए $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = \mathrm{F}(x)$

अत: कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि

$\mathrm{I} = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) मान लीजिए, $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$. अब $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ पर विचार कीजिए

$\sin 2t = u$ रखने पर $2\cos 2t\, dt = du$ अथवा $\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\, du$

अतः $$\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = \text{F}(t) \text{ मान लीजिए}$$

इसलिए कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से

$$\text{I} = \text{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{F}(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

प्रश्नावली 7.8

1 से 20 तक के प्रश्नों में निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-1}^{1} (x+1)\, dx$ **2.** $\int_{2}^{3} \frac{1}{x}\, dx$ **3.** $\int_{1}^{2} (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\, dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$ **6.** $\int_{4}^{5} e^x\, dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\, dx$ **9.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ **13.** $\int_{2}^{3} \frac{x\, dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{5x^2+1}\, dx$ **15.** $\int_{0}^{1} x\, e^{x^2}\, dx$

16. $\int_{1}^{2} \frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + x^3 + 2)\, dx$

18. $\int_{0}^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$ **19.** $\int_{0}^{2} \frac{6x+3}{x^2+4}\, dx$

20. $\int_{0}^{1} \left(x\, e^x + \sin \frac{\pi x}{4}\right) dx$

प्रश्न 21 एवं 22 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर है:

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

पिछले परिच्छेदों में हमने अनिश्चित समाकलन ज्ञात करने की अनेक विधियों की चर्चा की है। अनिश्चित समाकलन ज्ञात करने की महत्वपूर्ण विधियों में एक विधि प्रतिस्थापन विधि है।

प्रतिस्थापन विधि से $\int_a^b f(x)\, dx$, का मान ज्ञात करने के लिए आवश्यक चरण निम्नलिखित हैः

1. समाकलन के बारे में सीमाओं के बिना विचार कीजिए और $y = f(x)$ अथवा $x = g(y)$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि दिया हुआ समाकलन एक ज्ञात रूप में परिवर्तित हो जाए।
2. समाकलन अचर की व्याख्या किए बिना नए समाकल्य का नए चर के सापेक्ष समाकलन कीजिए।
3. नए चर के स्थान पर पुनः प्रतिस्थापन कीजिए और उत्तर को मूल चर के रूप में लिखिए।
4. चरण (3) से प्राप्त उत्तर का समाकलन की दी हुई सीमाओं पर मान ज्ञात कीजिए और उच्च सीमा वाले मान से निम्न सीमा वाले मान का अंतर ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी इस विधि को तीव्रतर बनाने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार आगे बढ़ सकते हैं। चरण (1) एवं (2) को करने के बाद चरण (3) को करने की आवश्यकता नहीं है। यहाँ समाकलन को नए चर के रूप में रखा जाता है और समाकलन की सीमाओं को नए चर के अनुसार परिवर्तित कर लेते हैं ताकि हम सीधे अंतिम चरण की क्रिया कर सकें।

आइए इसे हम उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 26 $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $t = x^5 + 1$, रखने पर $dt = 5x^4\,dx$

इसलिए
$$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

अत:
$$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

विकल्पत: सर्वप्रथम हम समाकलन का रूपांतरण करते हैं और तब रूपांतरित समाकलन का नयी सीमाओं के अनुसार मान ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए $t = x^5 + 1$. तब $dt = 5\,x^4\,dx$ नोट कीजिए कि

जब $x = -1$ तो $t = 0$ और जब $x = 1$ तो $t = 2$

अत: जैसे-जैसे x, -1 से 1 तक परिवर्तित होता है वैसे-वैसे t, 0 से 2 तक परिवर्तित होता है।

इसलिए
$$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_{0}^{2}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

उदाहरण 27 $\int_{0}^{1}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $t = \tan^{-1}x$, तब $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$. जब $x = 0$ तो $t = 0$ और जब $x = 1$ तो $t = \frac{\pi}{4}$

अत: जैसे-जैसे x, 0 से 1 तक परिवर्तित होता है वैसे-वैसे t, 0 से $\frac{\pi}{4}$ तक परिवर्तित होता है।

इसलिए
$$\int_{0}^{1}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t\,dt\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

प्रश्नावली 7.9

1 से 8 तक के प्रश्नों समाकलनों का मान प्रतिस्थापन का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi\, d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\, dx$ ($x + 2 = t^2$ रखिए) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$

प्रश्न 9 एवं 10 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

9. समाकलन $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ का मान है:

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. यदि $f(x) = \int_0^x t\sin t\, dt$, तब $f'(x)$ है:

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$ (C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some Properties of Definite Integrals)

निश्चित समाकलनों के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों को हम नीचे सूचीबद्ध करते हैं। ये गुण धर्म निश्चित समाकलनों का मान आसानी से ज्ञात करने में उपयोगी होंगे।

P$_0$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P$_1$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, विशिष्टतया $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P$_2$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।

P$_3$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

P$_4$: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (ध्यान दीजिए कि P_4, P_3 की एक विशिष्ट स्थिति है)

P$_5$: $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$, यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, यदि $f(2a-x) = -f(x)$

P_7 : (i) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$, यदि f एक सम फलन है अर्थात् यदि $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, यदि f एक विषम फलन है अर्थात् यदि $f(-x) = -f(x)$

एक-एक करके हम इन गुणधर्मों की उपपत्ति करते हैं।

P_0 की उपपत्ति $x = t$ प्रतिस्थापन करने पर सीधे प्राप्त होती है।

P_1 की उपपत्ति मान लीजिए कि f का प्रतिअवकलज F है। तब कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि $\int_a^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^{a} f(x)\,dx$,

यहाँ हम प्रेक्षित करते हैं कि यदि $a = b$, तब $\int_a^{a} f(x)\,dx = 0$

P_2 की उपपत्ति मान लीजिए कि f का प्रतिअवकलज F है, तब

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \ldots (1)$$

$$\int_a^{c} f(x)\,dx = F(c) - F(a) \qquad \ldots (2)$$

और

$$\int_c^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(c) \qquad \ldots (3)$$

(2) और (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$\int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^{b} f(x)\,dx$$

इससे गुणधर्म P_2 सिद्ध होता है।

P_3 की उपपत्ति मान लीजिए कि $t = a + b - x$. तब $dt = -\,dx$. जब $x = a$ तब, $t = b$ और जब $x = b$ तब $t = a$. इसलिए

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = -\int_b^{a} f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^{b} f(a+b-t)\,dt \quad (P_1 \text{ से})$$

$$= \int_a^{b} f(a+b-x)\,dx \quad (P_0 \text{ से})$$

P_4 की उपपत्ति $t = a - x$ रखिए और P_3 की तरह आगे बढ़िए। अब $dt = -\,dx$, जब $x = a$, $t = 0$

P_5 की उपपत्ति P_2, का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

दाएँ पक्ष के दूसरे समाकलन में $t = 2a - x$ प्रतिस्थापित कीजिए, तब $dt = -dx$ और जब $x = a$, तब $t = a$ और जब $x = 2a$, तब $t = 0$ और $x = 2a - t$ भी प्राप्त होता है।
इसलिए दूसरा समाकलन

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx \text{ प्राप्त होता है।}$$

अत: $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

P_6 की उपपत्ति P_5, का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

अब यदि $f(2a - x) = f(x)$, तो (1) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाता है

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

और यदि $f(2a - x) = -f(x)$, तब (1) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाता हैं

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7 की उपपत्ति

P_2 का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

दायें पक्ष के प्रथम समाकलन में $t = -x$ रखने पर
$dt = -dx$ जब $x = -a$ तब $t = a$ और जब $x = 0$, तब $t = 0$ और $x = -t$ भी प्राप्त होता है।

इसलिए $$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (P_0 \text{ से}) \qquad \ldots (1)$$

(i) अब यदि f एक सम फलन है तब $f(-x) = f(x)$ तो (1) से प्राप्त होता है कि

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) यदि f विषम फलन है तब $f(-x) = -f(x)$ तो (1) से प्राप्त होता है कि

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

उदाहरण 28 $\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि $[-1, 0]$ पर $x^3 - x \geq 0$ और $[0, 1]$ पर $x^3 - x \leq 0$ और $[1, 2]$ पर $x^3 - x \geq 0$ तब हम लिख सकते हैं कि

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 -(x^3 - x)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx \qquad (P_2 \text{ से})$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

उदाहरण 29 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम प्रेक्षित करते हैं कि $\sin^2 x$ एक सम फलन है।

इसलिए
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx \qquad [P_7\ (1)\text{से}]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

उदाहरण 30 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\quad I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin (\pi - x)\, dx}{1+\cos^2 (\pi - x)}$ $\quad$ (P_4 से)

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x \, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

अथवा $\quad 2\,I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1+\cos^2 x}$

अथवा $\quad I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1+\cos^2 x}$

$\cos x = t$ रखने पर $-\sin x \, dx = dt$

जब $x = 0$ तब $t = 1$ और जब $x = \pi$ तब $t = -1$ है। इसलिए हम पाते हैं कि

$$I = \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \quad (P_1 \text{ से})$$

$$= \pi \int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2} \text{ क्योंकि } \frac{1}{1+t^2} \text{ एक समफलन है} \quad (P_7 \text{ से})$$

$$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi \left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 31 $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ और $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

तब $f(-x) = \sin^5 (-x) \cos^4 (-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$, अर्थात् f एक विषम फलन है इसलिए $I = 0$ [P_7 (ii) से]

उदाहरण 32 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad \ldots (1)$

तब $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4 (\frac{\pi}{2} - x)} dx \qquad (P_4 \text{ से})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

अतः $$I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 33 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \qquad \ldots (1)$$

तब $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}} \qquad (P_3 \text{ से})$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि $2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

अतः $$I = \frac{\pi}{12}$$

उदाहरण 34 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

तब $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx \qquad (P_4 \text{ से})$$

I, के दोनों मानों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$2\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx \quad (\log 2 \text{ जोड़ने एवं घटाने पर})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx \qquad (\text{क्यों?})$$

प्रथम समाकलन में $2x = t$ रखने पर $2\, dx = dt$ जब $x = 0$ तो $t = 0$ और जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $t = \pi$

इसलिए $$2\text{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad [P_6 \text{ से क्योंकि } \sin(\pi - t) = \sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad (\text{चर } t \text{ को } x \text{ में परिवर्तित करने पर})$$

$$= \text{I} - \frac{\pi}{2}\log 2$$

अतः $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{-\pi}{2}\log 2$

प्रश्नावली 7.10

निश्चित समाकलनों के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए 1 से 19 तक के प्रश्नों में समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ **5.** $\int_{-5}^{5} |x+2|\, dx$ **6.** $\int_2^8 |x-5|\, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$ **9.** $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)\,dx$ **11.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}$ **13.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$ **14.** $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\,dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x\cos x}\,dx$ **16.** $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$ **17.** $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\,dx$

18. $\int_0^4 |x-1|\,dx$

19. दर्शाइए कि $\int_0^a f(x)g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f और g को $f(x) = f(a-x)$ एवं $g(x) + g(a-x) = 4$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

प्रश्न 20 एवं 21 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

20. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)\,dx$ का मान है:

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right)dx$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) –2

विविध उदाहरण

उदाहरण 35 $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $t = 1 + \sin 6x$, रखने पर $dt = 6\cos 6x\,dx$

इसलिए $$\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\,dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

उदाहरण 36 $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम प्राप्त करते हैं कि $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1 - \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$

अब $1 - \frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$, रखने पर $\frac{3}{x^4} dx = dt$

इसलिए
$$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{4}} dt$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$$

उदाहरण 37 $\int \frac{x^4 \, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम प्राप्त करते हैं कि $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \quad \text{... (1)}$$

अब $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$ के रूप में अभिव्यक्त करते हैं ... (2)

इसलिए
$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (C - B)x + A - C$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $A + B = 0, C - B = 0$ और $A - C = 1$, जिससे प्राप्त होता है कि $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$

A, B एवं C का मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \quad \text{... (3)}$$

(3) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

इसलिए

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

उदाहरण 38 $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$$= \int \log(\log x)\, dx + \int \frac{1}{(\log x)^2} dx$$

आइए, प्रथम समाकलन में 1 को द्वितीय फलन के रूप में लेते हैं। तब खंडशः समाकलन से हम पाते हैं कि

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x} x\, dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots (1)$$

पुनः $\int \frac{dx}{\log x}$, पर विचार कीजिए, 1 को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए और खंडशः विधि द्वारा समाकलन कीजिए, इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \qquad \ldots (2)$$

(2) को (1), में रखने पर हम पाते हैं

$$I = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C$$

उदाहरण 39 $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $I = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}(1+\cot x)\, dx$

अब $\tan x = t^2$, रखने पर $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

अथवा $$dx = \frac{2t\, dt}{1+t^4}$$

तब $$I = \int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

पुनः $t - \frac{1}{t} = y$, रखने पर $\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = dy$

तब $$I = 2\int \frac{dy}{y^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + C = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + C$$

उदाहरण 40 $\int \frac{\sin 2x \cos 2x\, dx}{\sqrt{9-\cos^4(2x)}}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}\, dx$

अब $\cos^2(2x) = t$ रखने पर $4\sin 2x \cos 2x\, dx = -\, dt$

इसलिए $$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + C$$

उदाहरण 41 $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, -1 \le x \le 1 \text{ के लिए} \\ -x \sin \pi x, 1 \le x \le \frac{3}{2} \text{ के लिए} \end{cases}$

इसलिए $$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

दायें पक्ष के दोनों समाकलनों का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

उदाहरण 42 $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin^2 (\pi - x)}$

(P_4 के उपयोग से)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$

अतः $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

अथवा
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$
(P_6 के उपयोग से)

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2 + cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^1\frac{dt}{a^2 + b^2 + t^2} - \int_1^0\frac{dt}{a^2u^2 + b^2}\right]$$ (रखिए $\tan x = t$ और $\cot x = u$)

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1 से 24 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\frac{1}{x - x^3}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

3. $\frac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [संकेत : $x = \frac{a}{t}$ रखिए] **4.** $\frac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [संकेत: $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$ रखिए]

6. $\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\; e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)\,[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **20.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$

21. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$ **22.** $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

23. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

24 से 31 तक के प्रश्नों में निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

24. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **25.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ **26.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ **28.** $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **29.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$

31. $\int_1^4\left(|x-1|+|x-2|+|x-3|\right)dx$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (प्रश्न 32 से 39 तक)।

32. $\int_1^3\dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{2}{3}$ **33.** $\int_0^1 x\,e^x\,dx=1$

34. $\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **35.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\dfrac{2}{3}$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\tan^3 x\,dx=1-\log 2$ **37.** $\int_0^1\sin^{-1}x\,dx=\dfrac{\pi}{2}-1$

38 से 40 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

38. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ बराबर है:

(A) $\tan^{-1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$

(C) $\log(e^x - e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

39. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

40. यदि $f(a + b - x) = f(x)$, तो $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

सारांश

- समाकलन, अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम है। अवकलन गणित में हमें एक फलन दिया हुआ होता है और हमें इस फलन का अवकलज अथवा अवकल ज्ञात करना होता है परंतु समाकलन गणित में हमें एक ऐसा फलन ज्ञात करना होता है जिसका अवकल दिया हुआ होता है। अतः समाकलन एक ऐसा प्रक्रम है जो कि अवकलन का व्युत्क्रम है।

  मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. तब हम $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ लिखते हैं। ये समाकलन अनिश्चित समाकलन अथवा व्यापक समाकलन कहलाते हैं। C समाकलन अचर कहलाता है। इन सभी समाकलनों में एक अचर का अंतर होता है।

- अनिश्चित समाकलन के कुछ गुणधर्म निम्नलिखित है।

  1. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

  2. किसी भी वास्तविक संख्या k, के लिए $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$

  अधिक व्यापकतः, यदि $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, फलन हैं तथा $k_1, k_2, ..., k_n$, वास्तविक संख्याएँ हैं तो

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]\, dx$$

$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + ... + k_n \int f_n(x)\, dx$$

- **कुछ प्रामाणिक समाकलन**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. विशिष्टत: $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (iii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (v) $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(vii) $\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + C$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$ (x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$ (xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ (xiv) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

- **आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन**

स्मरण कीजिए कि एक परिमेय फलन $\frac{P(x)}{Q(x)}$, दो बहुपदों का अनुपात है जिसमें $P(x)$ और $Q(x)$, x के बहुपद हैं और $Q(x) \neq 0$. यदि बहुपद $P(x)$ की घात बहुपद $Q(x)$, की घात से अधिक है तो हम $P(x)$ को $Q(x)$ से विभाजित करते हैं ताकि $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ के रूप में लिखा जा सके जहाँ $T(x)$, एक बहुपद है और $P_1(x)$ की घात $Q(x)$ की घात से कम है। बहुपद होने के कारण $T(x)$ का समाकलन आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ को निम्नलिखित प्रकार की आंशिक भिन्नों के योगफल के रूप में व्यक्त करते हुए इसका समाकलन ज्ञात किया जा सकता है।

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$, $a \neq b$

2. $\dfrac{px+q}{(x-a)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2}$

3. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

4. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \dfrac{C}{x-b}$

5. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

जहाँ $x^2 + bx + c$ के आगे और गुणनखंड नहीं किए जा सकते।

◆ प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

समाकलन के चर में परिवर्तन दिए हुए समाकलन को किसी एक आधारभूत समाकलन में परिवर्तित कर देता है। यह विधि जिसमें हम एक चर को किसी दूसरे चर में परिवर्तित करते हैं प्रतिस्थापन विधि कहलाती है। जब समाकल्य में कुछ त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हों तो हम समाकलन ज्ञात करने के लिए कुछ सुपरिचित सर्व समिकाओं का उपयोग करते हैं। प्रतिस्थापन विधि का उपयोग करते हुए हम निम्नलिखित प्रामाणिक समाकलनों को प्राप्त करते हैं:

(i) $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

◆ कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ (iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C$

◆ **खंडश: समाकलन**

दिए हुए फलनों f_1 तथा f_2, के लिए हम प्राप्त करते हैं कि

$\int f_1(x) \,.\, f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \,.\, \int f_2(x)\, dx \right] dx$, अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकलन – {प्रथम फलन का अवकल गुणांक × द्वितीय फलन का समाकलन} का समाकलन . प्रथम फलन एवं द्वितीय फलन के चयन में सावधानी रखनी चाहिए। स्पष्टतया हमें ऐसे फलन को द्वितीय फलन के रूप में लेना चाहिए जिसका समाकलन हमें भलि-भाँति ज्ञात है।

◆ $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + C$

◆ **कुछ विशिष्ट प्रकार के समाकलन**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ अथवा $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ के प्रकार के समाकलनों को प्रामाणिक रूप में निम्नलिखित विधि द्वारा परिवर्तित किया जा सकता है:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ अथवा $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ के प्रकार के समाकलनों को प्रामाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है:

$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B = A\,(2ax+b)+B$, A तथा B का मान ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों से गुणांकों की तुलना की जाती है।

- हमने $\int_a^b f(x)\,dx$ को, वक्र $y = f(x)$, $a \le x \le b$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किया है। मान लीजिए $[a, b]$ में x एक बिंदु है तब $\int_a^x f(x)\,dx$ क्षेत्रफल फलन $A(x)$ को निरूपित करता है। क्षेत्रफल फलन की संकल्पना हमें कलन की आधारभूत प्रमेय की ओर निम्नलिखित रूप में प्रेरित करती है।
- **समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय** मान लीजिए कि क्षेत्रफल फलन $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, $\forall\, x \ge a$, द्वारा परिभाषित है जहाँ फलन f अंतराल $[a, b]$ पर संतत फलन माना गया है। तब $A'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$
- **समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय**

  मान लीजिए किसी बंद अंतराल $[a, b]$ पर f, x का संतत फलन है और F एक दूसरा फलन है जहाँ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, f के प्रान्त के सभी x के लिए है, तब

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)+C\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

  यह परिसर $[a, b]$ पर f का निश्चित समाकलन कहलाता है जहाँ a तथा b समाकलन की सीमाएँ कहलाती हैं a निम्न सीमा कहलाती है और b को उच्च सीमा कहते हैं।

12082CH08

अध्याय 8

समाकलनों के अनुप्रयोग (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 भूमिका (Introduction)

ज्यामिति में, हमने त्रिभुजों आयतों, समलंब चतुर्भुजों एवं वृत्तों सहित विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल के परिकलन के लिए सूत्रों का अध्ययन किया है। वास्तविक जीवन की अनेक समस्याओं के लिए गणित के अनुप्रयोग में इस प्रकार के सूत्र मूल होते हैं। प्रारंभिक ज्यामिति के सूत्रों की सहायता से हम अनेक साधारण आकृतियों के क्षेत्रफल का परिकलन कर सकते हैं। यद्यपि ये सूत्र वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्रफल के परिकलन के लिए अपर्याप्त हैं इसके लिए हमें समाकलन गणित की कुछ संकल्पनाओं की आवश्यकता होगी।

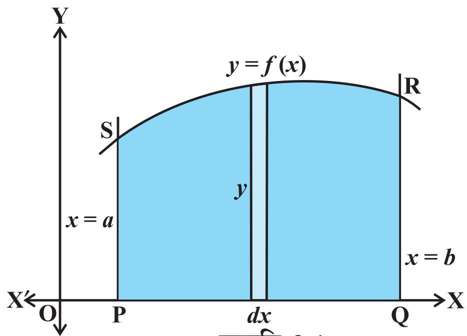
A.L. Cauchy (1789-1857)

पिछले अध्याय में हमने योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलनों का परिकलन करते समय वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a$, $x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने का अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम साधारण वक्रों के अंतर्गत, सरल रेखाओं एवं वृत्तों, परवलयों, तथा दीघवृत्तों (केवल मानक रूप) की चापों के बीच घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलनों के एक विशिष्ट अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे। उपरोक्त वक्रों से घिरे क्षेत्रफल को भी ज्ञात करेंगे।

8.2 साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area Under Simple Curves)

पिछले अध्याय में हमने, योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन एवं कलन की आधारभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए निश्चित समाकलन का परिकलन कैसे किया जाए, का अध्ययन किया है। अब हम वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियाँ $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने

की आसान एवं अंतर्ज्ञान से प्राप्त विधि की चर्चा करते हैं। आकृति 8.1 से हम वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल को बहुत सी पतली एवं उर्ध्वाधर बहुत सी पट्टियों से निर्मित मान सकते हैं। y उँचाई एवं dx चौड़ाई वाली एक स्वेच्छ पट्टी पर विचार कीजिए, इसमें dA (प्रारंभिक पट्टी का क्षेत्रफल) $= ydx$, जहाँ $y = f(x)$ है।



आकृति 8.1

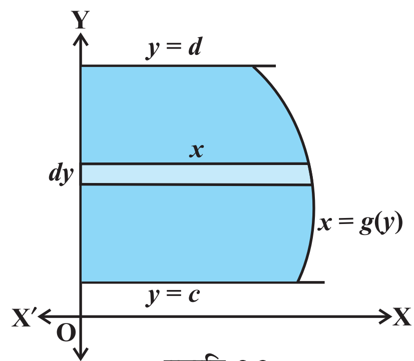
यह क्षेत्रफल प्रारंभिक क्षेत्रफल कहलाता है जो कि क्षेत्र के भीतर किसी स्वेच्छ स्थिति पर स्थापित है एवं a तथा b के मध्य x के किसी मान से विनिर्दिष्ट है। वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ एवं x–अक्ष से घिरे क्षेत्र के कुल क्षेत्रफल A को, क्षेत्र PQRSP में सभी पतली पट्टियों के क्षेत्रफलों के योगफल के परिणाम के रूप में देख सकते हैं। सांकेतिक भाषा में हम इसे इस प्रकार अभिव्यक्त करते हैं:

$$\text{A} = \int_a^b d\text{A} = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\, dx$$

वक्र $x = g(y)$, y-अक्ष एवं रेखाएँ $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है।

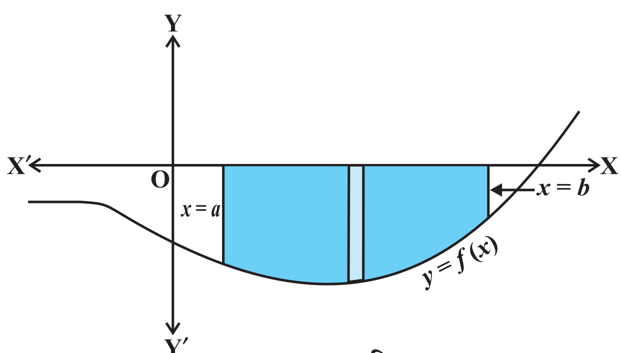
$$\text{A} = \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\, dy$$

यहाँ हम क्षैतिज पट्टियों पर विचार करते हैं जैसा कि आकृति 8.2 में दर्शाया गया है।



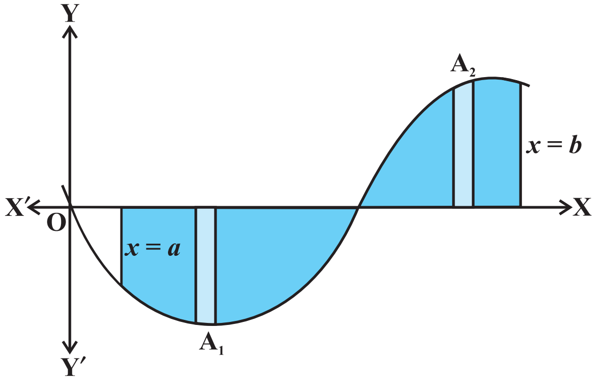
आकृति 8.2

टिप्पणी यदि चर्चित वक्र की स्थिति x-अक्ष के नीचे है, तो जैसा कि आकृति 8.3 में दर्शाया गया है, जहाँ $x = a$ से $x = b$ तक $f(x) < 0$ इसलिए दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a, x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ऋणात्मक हो जाता है, परंतु हम क्षेत्रफल के केवल संख्यात्मक मान की ही चर्चा करते हैं। इसलिए यदि क्षेत्रफल ऋणात्मक है तो हम इसके निरपेक्ष मान, अर्थात् $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ को लेते हैं।



आकृति 8.3

सामान्यत: ऐसा हो सकता है कि वक्र का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर है तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है, जैसा कि आकृति 8.4 में दर्शाया गया है। यहाँ $A_1 < 0$ तथा $A_2 > 0$ है, इसलिए वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A सूत्र $A = |A_1| + A_2$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 8.4

उदाहरण 1 वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.5 में दिए हुए वृत्त से घिरे हुए क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

= 4 (दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = a$ से घिरे क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल)

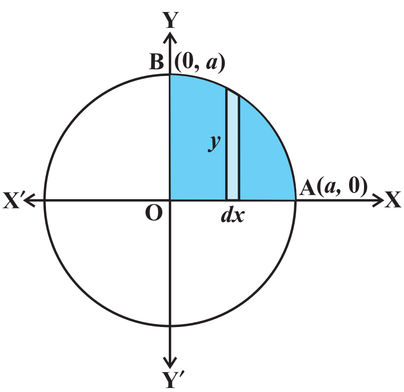
[क्योंकि वृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परित: सममित है]

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

क्योंकि $x^2 + y^2 = a^2$ से $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है।

जैसा कि क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित है इसलिए y को धनात्मक लिया जाता है। समाकलन करने पर दिए हुए वृत्त से घिरा क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:



आकृति 8.5

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$

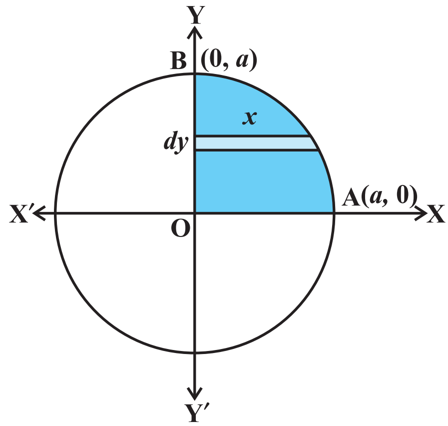
विकल्पतः जैसा कि आकृति 8.6 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए वृत्त द्वारा घिरे क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$



आकृति 8.6

उदाहरण 2 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल का ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.7 में दीर्घवृत्त से घिरे क्षेत्र ABA′B′A का क्षेत्रफल

$$= 4\left(\begin{array}{l}\textit{दिए हुए वक्र, } x-\textit{अक्ष, कोटियों } x=0, x=a \textit{ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में}\\ \textit{घिरे क्षेत्र } AOBA \textit{ का क्षेत्रफल}\end{array}\right)$$

(क्योंकि दीर्घवृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परितः सममित है)

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

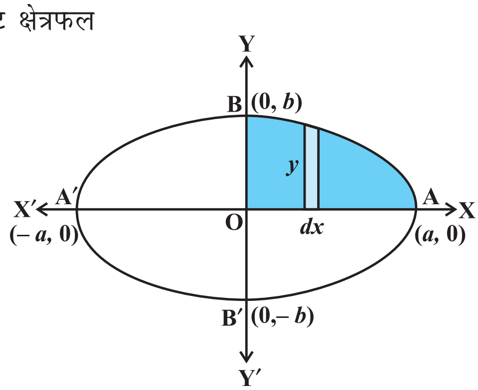
अब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है, परंतु क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में है इसलिए y धनात्मक लिया जाता है, इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.7

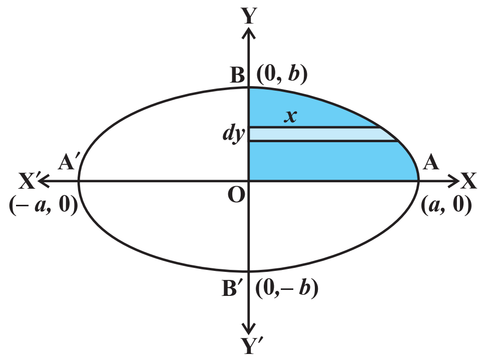
विकल्पत: जैसा कि आकृति 8.8 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^b x dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\, dy \quad (\text{क्यों?})$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.8

प्रश्नावली 8.1

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3 एवं 4 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

3. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

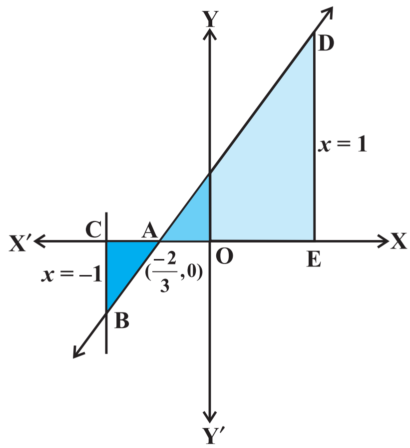
4. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 3 रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल जैसा कि आकृति 8.9 में दर्शाया गया है, रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष को $x = \frac{-2}{3}$ पर मिलती है और $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष के नीचे है तथा $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष से ऊपर है।



आकृति 8.9

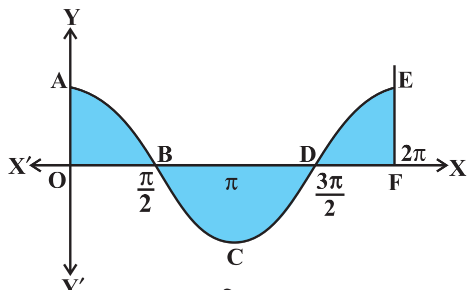
अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र ACBA का क्षेत्रफल + क्षेत्र ADEA का क्षेत्रफल

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

उदाहरण 4 $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.10 से, अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OABO का क्षेत्रफल + क्षेत्र BCDB का क्षेत्रफल + क्षेत्र DEFD का क्षेत्रफल



आकृति 8.10

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

(i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ एवं x-अक्ष

(ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ एव x-अक्ष

2. $y = |x+3|$ का ग्राफ़ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3| dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4 से 5 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए:

4. वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$, $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

5. वक्र $y = x\,|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[**संकेत** : $y = x^2$ यदि $x > 0$ एवं $y = -x^2$ यदि $x < 0$]

सारांश

- वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं रेखाओं $x = a$ तथा $x = b$ $(b > a)$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र : क्षेत्रफल $= \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$ है।
- वक्र $x = \phi(y)$, y-अक्ष एवं रेखाओं $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र: क्षेत्रफल $= \int_c^d x dy = \int_c^d \phi(y) dy$ है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

समाकलन गणित का प्रारंभ गणित के प्रारंभिक विकास काल से ही हुआ है। यह प्राचीन यूनानी गणितज्ञों द्वारा विकसित नि:शेषता विधि पर आधारित है। इस विधि का प्रारंभ समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल और ठोस वस्तुओं के आयतन की गणना से हुआ। इस तरह से नि:शेषता विधि, समाकलन विधि की प्रारंभिक स्थिति के रूप में समझी जा सकती है। नि:शेषता विधि का सर्वोत्कृष्ट विकास प्रारंभिक काल में यूडोक्स (Eudoxus (440 ई. पू.) और आर्किमिडीज (Archimedes (300 ई. पू.) के कार्यों से प्राप्त हुआ है।

कलन के सिद्धांत का क्रमबद्ध विकास ईसा के पश्चात् 17वीं शताब्दी में हुआ। सन् 1665 में न्यूटन ने कलन पर अपना कार्य प्रवाहन सिद्धांत (Theory of fluxion) के रूप में प्रारंभ किया।

उन्होंने इस सिद्धांत का प्रयोग वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्शी और वक्रता-त्रिज्या ज्ञात करने में किया। न्यूटन ने व्युत्क्रम फलन की धारणा से परिचय कराया और इसको प्रतिअवकलज (अनिश्चित समाकलन) या स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि (Inverse Method of tangents) का नामकरण किया।

1684–86, के बीच में लैवनिज़ (Leibnitz) ने एक प्रपत्र एकटा इरोडिटोरियम (Acta Eruditorum) में प्रकाशित किया और इसे कैलक्यूलस सम्मैटोरियस (Calculous Summatorius) नाम दिया, क्योंकि यह अनंत छोटे क्षेत्रफलों के योगफल से संबंधित था, वहीं पर उन्होंने इसे योगफल के प्रतीक '∫' द्वारा व्यक्त किया। सन् 1696 ई. में उन्होंने जे. बरनौली (J.Bernoulli) के सुझाव को मानकर अपने प्रपत्र को कैलक्यूलस इंटेग्राली (Calculus Integrali) नाम में परिवर्तित कर दिया। यह न्यूटन द्वारा स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि के संगत था।

न्यूटन और लैवनिज़ दोनों ने पूर्णतः स्वतंत्र मार्ग अपनाया जो मूलतः भिन्न थे। तथापि उन दोनों के सिद्धांतों के संगत प्रतिफल तत्सम पाए गए। लैवनिज़ ने निश्चित समाकलन की धारणा का प्रयोग किया।
यह निश्चित है कि उन्होंने ही सर्वप्रथम प्रतिअवकलज और निश्चित समाकलन के बीच के संबंध को स्पष्टतया सराहा।

निष्कर्ष यह है कि समाकलन गणित के आधारभूत धारणाओं, सिद्धांतों तथा अवकलन गणित से इसके प्रारंभिक संबंधों का विकास पी.डी. फर्मा, न्यूटन, और लैवनिज़ के कार्यों द्वारा 17वीं शताब्दी के अंत में हुआ। तथापि इसका औचित्य, सीमा की संकल्पना के आधार पर 19वीं शताब्दी के प्रारंभ में ए.एल.कोशी (A.L.Cauchy) के द्वारा किया गया। अंत में ली सोफी (Lie Sophie) का निम्नलिखित उद्धरण वर्णनीय है। "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".

12082CH09

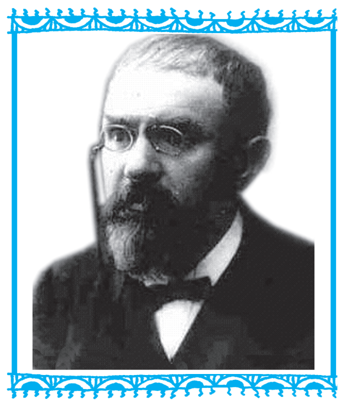
अध्याय 9

अवकल समीकरण
Differential Equations

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain – D. HILBERT* ❖

9.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI एवं इस पुस्तक के अध्याय 5 में हमने चर्चा की थी, कि एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष किसी फलन f का अवकलज कैसे ज्ञात किया जाता है अर्थात् किसी फलन f की परिभाषित प्रांत के प्रत्येक x के लिए, $f'(x)$ कैसे ज्ञात किया जाता है। इसके अतिरिक्त समाकल गणित के अध्याय में हमने चर्चा की थी, कि यदि किसी फलन f का अवकलज फलन g है तो फलन f कैसे ज्ञात किया जाए। इसको निम्न रूप में सूत्रबद्ध किया जा सकता है:



Henri Poincare
(1854-1912)

किसी दिए हुए फलन g के लिए फलन f ज्ञात कीजिए ताकि

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ जहाँ } y = f(x) \qquad \dots (1)$$

समीकरण (1) के रूप वाले समीकरण को अवकल समीकरण कहते हैं। इसकी औपचारिक परिभाषा बाद में दी जाएगी।

अवकल समीकरणों का उपयोग मुख्य रूप से भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान, मानव विज्ञान, भूविज्ञान, अर्थशास्त्र आदि विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है। अत: सभी अत्याधुनिक वैज्ञानिक अन्वेषणों के लिए अवकल समीकरणों के गहन अध्ययन की अत्यंत आवश्यकता है। इस अध्याय में, हम अवकल समीकरण की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं, अवकल समीकरण के व्यापक एवं विशिष्ट हल, अवकल समीकरण का निर्माण, प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण को हल करने की कुछ विधियाँ और विभिन्न क्षेत्रों में अवकल समीकरणों के कुछ उपयोगों के बारे में अध्ययन करेंगे।

9.2 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic Concepts)

हम पहले से ही निम्नलिखित प्रकार के समीकरणों से परिचित हैं

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \dots (2)$$

$$x + y = 7 \quad \dots (3)$$

आइए निम्नलिखित समीकरण पर विचार करें

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \dots (4)$$

हम पाते हैं कि समीकरणों (1), (2) एवं (3) में केवल स्वतंत्र और/अथवा आश्रित चर (एक या अधिक) शामिल हैं जब कि समीकरण (4) में चर के साथ-साथ स्वतंत्र चर (x) के सापेक्ष आश्रित चर (y) का अवकलज भी शामिल है। इस प्रकार का समीकरण अवकल समीकरण कहलाता है।

सामान्यत: एक ऐसा समीकरण, जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।

एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसमें केवल एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष, आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, सामान्य अवकल समीकरण कहलाता है। उदाहरणतया

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad \dots (5)$$

एक सामान्य अवकल समीकरण है।

नि:सन्देह ऐसे भी अवकल समीकरण होते हैं जिनमें एक से अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज शामिल होते हैं, इस प्रकार के अवकल समीकरण आंशिक अवकल समीकरण कहलाते हैं। लेकिन इस स्तर पर हम अपने आप को केवल सामान्य अवकल समीकरणों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे। इससे आगे हम सामान्य अवकल समीकरण के लिए अवकल समीकरण शब्द का ही उपयोग करेंगे।

टिप्पणी

1. हम अवकलजों के लिए निम्नलिखित संकेतों के उपयोग को वरीयता देंगे

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. उच्च कोटि वाले अवकलजों के लिए, इतने अधिक डैशों (dashes) को उच्च प्रत्यय के रूप में प्रयुक्त करना असुविधाजनक होगा इसलिए nवें कोटि वाले अवकलज $\frac{d^n y}{dx^n}$ के लिए हम संकेत y_n का उपयोग करेंगे।

9.2.1 *अवकल समीकरण की कोटि (Order of a differential equation)*

किसी अवकल समीकरण की कोटि उस अवकल समीकरण में सम्मिलित स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि द्वारा परिभाषित होती है।

निम्नलिखित अवकल समीकरणों पर विचार कीजिए:

$$\frac{dy}{dx}=e^x \qquad \text{... (6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=0 \qquad \text{...(8)}$$

समीकरण (6), (7) एवं (8) में क्रमशः प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय कोटि के उच्चतम अवकलज उपस्थित हैं इसलिए इन समीकरणों की कोटि क्रमशः 1, 2 एवं 3 है।

9.2.2 *अवकल समीकरण की घात (Degree of a differential equation)*

किसी अवकल समीकरण की घात का अध्ययन करने के लिए मुख्य बिंदु यह है कि वह अवकल समीकरण, अवकलजों y', y'', y''' इत्यादि में बहुपद समीकरण होना चाहिए। निम्नलिखित समीकरणों पर विचार कीजिए:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{... (9)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}-\sin^2 y=0 \qquad \text{... (10)}$$

$$\frac{dy}{dx}+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad \text{... (11)}$$

हम प्रेक्षित करते हैं कि समीकरण (9) y''', y'' एवं y' में बहुपद समीकरण है। समीकरण (10) y' में बहुपद समीकरण है (यद्यपि यह y में बहुपद नहीं है) इस प्रकार के अवकल समीकरणों की घात को परिभाषित किया जा सकता है। परंतु समीकरण (11) y' में बहुपद समीकरण नहीं है और इस प्रकार के अवकल समीकरण की घात को परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

यदि एक अवकल समीकरण अवकलजों का बहुपद समीकरण है तो उस अवकल समीकरण की घात से हमारा तात्पर्य है उस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात (धनात्मक पूर्णांक)

उपरोक्त परिभाषा के संदर्भ में हम प्रेक्षित कर सकते हैं कि समीकरणों (6), (7), (8) एवं (9) में से प्रत्येक की घात 1 है, समीकरण (10) की घात 2 है जब कि अवकल समीकरण (11) की घात परिभाषित नहीं है।

टिप्पणी किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) हमेशा धनात्मक पूर्णांक होते हैं।

उदाहरण 1 निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

हल

(i) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है। इसलिए इसकी कोटि 1 है। यह y' में बहुपद समीकरण है एवं $\frac{dy}{dx}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(ii) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है । इसलिए इसकी कोटि 2 है। यह अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं $\frac{dy}{dx}$ में बहुपद समीकरण है और $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iii) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y''' है। इसलिए इसकी कोटि 3 है। इस समीकरण का बायाँ पक्ष अवकलजों में बहुपद नहीं है इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्नावली 9.1

1 से 10 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$ **3.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$

7. $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$

9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0$

10. $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. अवकल समीकरण

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ की घात है:

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

12. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है:

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) परिभाषित नहीं है

9.3. अवकल समीकरण का व्यापक एवं विशिष्ट हल (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

पिछली कक्षाओं में हमने निम्नलिखित प्रकार के समीकरणों को हल किया है:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

समीकरणों (1) तथा (2) का हल एक ऐसी वास्तविक अथवा सम्मिश्र संख्या है जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करती है अर्थात् जब इस संख्या को समीकरण में अज्ञात x के स्थान पर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तो दायाँ पक्ष और बायाँ पक्ष आपस में बराबर हो जाते हैं।

अब अवकल समीकरण
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (3)}$$
पर विचार करते हैं।

प्रथम दो समीकरणों के विपरीत इस अवकल समीकरण का हल एक ऐसा फलन ϕ है जो इस समीकरण को संतुष्ट करेगा अर्थात् जब इस फलन ϕ को अवकल समीकरण में अज्ञात y (आश्रित चर) के स्थान पर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तो बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं।

वक्र $y = \phi(x)$ अवकल समीकरण का हल वक्र (समाकलन वक्र) कहलाता है। निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \quad \text{... (4)}$$

जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$. यदि इस फलन और इसके अवकलजों को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं। इसलिए यह फलन अवकल समीकरण (3) का हल है।

मान लीजिए कि a और b को कुछ विशिष्ट मान $a = 2$ एवं $b = \dfrac{\pi}{4}$ दे दिए जाते हैं तो हमें निम्नलिखित फलन प्राप्त होता है:

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \ldots (5)$$

यदि इस फलन और इसके अवकलजों को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो पुनः बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं। इसलिए ϕ_1 भी समीकरण (3) का एक हल है।

फलन ϕ में दो स्वेच्छ अचर (प्राचल) a, b सम्मिलित हैं तथा यह फलन दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल कहलाता है। जबकि फलन ϕ_1 में कोई भी स्वेच्छ अचर सम्मिलित नहीं है लेकिन प्राचलों a तथा b के विशिष्ट मान उपस्थित हैं और इसलिए इसको अवकल समीकरण का विशिष्ट हल कहा जाता है।

ऐसा हल, जिसमें स्वेच्छ अचर उपस्थित हो अवकल समीकरण का व्यापक हल कहलाता है।

ऐसा हल, जो स्वेच्छ अचरों से मुक्त है अर्थात् व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त हल, अवकल समीकरण का विशिष्ट हल कहलाता है।

उदाहरण 2 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = e^{-3x}$, अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ का एक हल है।

हल दिया हुआ फलन $y = e^{-3x}$ है। इसके दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते है:

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-3x} \qquad \ldots (1)$$

अब समीकरण (1) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}$ और y का मान, दिए गए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर पर हम पाते हैं कि

बायाँ पक्ष $= 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9\,e^{-3x} - 9\,e^{-3x} = 0 =$ दायाँ पक्ष

इसलिए दिया हुआ फलन दिए हुए अवकल समीकरण का एक हल है।

उदाहरण 3 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = a \cos x + b \sin x$, जिसमें $a, b \in \mathbf{R}$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है।

हल दिया हुआ फलन है

$$y = a \cos x + b \sin x \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर हम देखते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos x - b \sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं y का मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते हैं:

बायाँ पक्ष = $(-a \cos x - b \sin x) + (a \cos x + b \sin x) = 0$ = दायाँ पक्ष

इसलिए दिया हुआ फलन, दिए हुए अवकल समीकरण का हल है।

प्रश्नावली 9.2

1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$
2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$
3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$
4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$
5. $y = Ax$: $xy' = y \ (x \neq 0)$
6. $y = x \sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ और $x > y$ अथवा $x < -y$)
7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1-xy} \ (xy \neq 1)$
8. $y - \cos y = x$: $(y \sin y + \cos y + x)\, y' = y$
9. $x + y = \tan^{-1}y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}\ x \in (-a, a) : x + y \dfrac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

11. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है:

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है:

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4. प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ (Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

इस परिच्छेद में हम प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की तीन विधियों की चर्चा करेंगे।

9.4.1 *पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण (Differential equations with variables separable)*

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप का होता है:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) \quad \text{... (1)}$$

यदि F (x, y) को गुणनफल g (x), $h(y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है जहाँ $g(x)$, x का फलन है और $h(y)$, y का एक फलन है तो समीकरण (1) पृथक्करणीय चर वाला समीकरण कहलाता है। ऐसा होने पर समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \cdot g(x) \quad \text{... (2)}$$

यदि $h(y) \neq 0$, तो चरों को पृथक् करते हुए समीकरण (2) को

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \quad \text{... (3)}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। समीकरण (3) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \quad \text{... (4)}$$

इस प्रकार समीकरण (4), दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रूप में प्रदान करता है:

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C} \quad \text{... (5)}$$

यहाँ H (y) एवं G (x) क्रमशः $\dfrac{1}{h(y)}$ एवं $g(x)$ के प्रतिअवकलज हैं और C स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 4 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया है कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \quad (y \neq 2) \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) में चरों को पृथक् करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

अथवा $$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

अथवा $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,C_1 = 0$$

अथवा $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0 \qquad \ldots (3)$$

जहाँ $C = 2C_1$

समीकरण (3) अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 5 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि $1 + y^2 \neq 0$, इसलिए चरों को पृथक् करते हुए दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करते हुए हम पाते हैं:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

अथवा $$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

यह समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 6 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $y = 1$ जब $x = 0$ हो

हल यदि $y \neq 0$, दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\, dx \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\, dx$$

अथवा $$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

अथवा $$y = \frac{1}{2x^2 - C} \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) में $y = 1$ और $x = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = -1$ प्राप्त होता है।

C का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर दिए हुए अवकल समीकरण का विशिष्ट हल $y = \frac{1}{2x^2+1}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7 बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x\,^*dy = (2x^2 + 1)\,^*dx\ (x \neq 0)$ है।

हल दिए हुए अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप मे अभिव्यक्त किया जा सकता है:

$$dy = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$$

अथवा $$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

अथवा $$y = x^2 + \log|x| + C \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) दिए हुए अवकल समीकरण के हल वक्रों के कुल को निरूपित करता है परंतु हम इस कुल के एक ऐसे विशिष्ट सदस्य का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो बिंदु (1, 1) से गुजरता हो।

---

* लैबनीज द्वारा प्रदत्त संकेत $\frac{dy}{dx}$ अत्यंत लचीला है, तथा बहुत सी गणना एवं औपचारिक रूपांतरणों में प्रयुक्त होता है, जहाँ हम dx और dy को साधारण संख्याओं की तरह व्यवहार में लाते हैं। dx और dy को पृथक्-पृथक् सत्ता मानकर हम बहुत सी गणनाओं की सुस्पषट व्याख्या कर सकते हैं। संदर्भ: Introduction to calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger — Verlog New York.

इसलिए समीकरण (2) में $x = 1,\ y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = 0$ प्राप्त होता है। C का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट वक्र का समीकरण $y = x^2 + \log|x|$ के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 बिंदु $(-2, 3)$, से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

हल हम जानते हैं कि किसी वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \ldots (1)$$

चरों को पृथक् करते हुए समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

अथवा

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) में $x = -2,\ y = 3$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = 5$ प्राप्त होता है।
C का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5 \quad \text{अथवा} \quad y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 9 किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। कितने वर्षों में Rs 1000 की राशि दुगुनी हो जाएगी?

हल मान लीजिए किसी समय t पर मूलधन P है। दी हुई समस्या के अनुसार

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

अथवा

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) में चरों को पृथक् करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

अथवा $$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

अथवा $$P = C\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{जहाँ } e^{C_1} = C) \qquad \ldots (3)$$

अब $P = 1000$, जब $t = 0$

P और t का मान समीकरण (3) में रखने पर हम $C = 1000$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए समीकरण (3) से हम प्राप्त करते हैं :

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

मान लीजिए t वर्षों में मूलधन दुगुना हो जाता है, तब

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

प्रश्नावली 9.3

1 से 10 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1\ (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 से 14 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1$ यदि $x = 0$

12. $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=1$; $y = 0$ यदि $x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=a \;\; (a \in \text{R})$; $y = 1$ यदि $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$; $y = 2$ यदि $x = 0$

15. बिंदु (0, 0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$ है।

16. अवकल समीकरण $xy\dfrac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ के लिए बिंदु (1, –1) से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

17. बिंदु (0, –2) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता और उस बिंदु के y निर्देशांक का गुणनफल उस बिंदु के x निर्देशांक के बराबर है।

18. एक वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, स्पर्श बिंदु को, बिंदु (– 4, –3). से मिलाने वाले रेखाखंड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिंदु (–2, 1) से गुज़रता हो तो इस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन, जिसे हवा भरकर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है यदि आरंभ में इस गुब्बारे की त्रिज्या 3 ईकाई है और 3 सेकेंड बाद 6 ईकाई है, तो t सेकेंड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

20. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि $r\%$ वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं, तो r का मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2 = 0.6931$).

21. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में Rs 1000 जमा कराए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जाएगी? ($e^{0.5} = 1.648$)

22. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1, 00, 000 है। 2 घंटो में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घंटों में जीवाणुओं की संख्या 2, 00, 000 हो जाएगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती है।

23. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ का व्यापक हल है:

(A) $e^x + e^{-y} = \text{C}$ (B) $e^x + e^y = \text{C}$

(C) $e^{-x} + e^y = \text{C}$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = \text{C}$

9.4.2 समघातीय अवकल समीकरण (Homogenous differential equations)

x एवं y के निम्नलिखित फलनों पर विचार कीजिए

$$F_1(x, y) = y^2 + 2xy, \qquad F_2(x, y) = 2x - 3y,$$

$$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right), \qquad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$$

यदि उपरोक्त फलनों में x और y को किसी शून्येतर अचर λ के लिए क्रमशः λx एवं λy से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो हम प्राप्त करते हैं:

$$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$$

$$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$$

$$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, किसी भी n के लिए

यहाँ हम प्रेक्षित करते हैं कि फलनों F_1, F_2, F_3 को $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ के रूप में लिखा जा सकता है परंतु फलन F_4 को इस रूप में नहीं लिखा जा सकता है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त करते हैं।

फलन $F(x, y)$, n घात वाला समघातीय फलन कहलाता है। यदि किसी शून्येतर अचर λ के लिए $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$

हम नोट करते हैं कि उपरोक्त उदाहरणों में F_1, F_2, F_3 क्रमशः 2, 1, 0 घात वाले समघातीय फलन हैं जबकि F_4 समघातीय फलन नहीं है।

हम यह भी प्रेक्षित करते हैं कि

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा

$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा

$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_3(x, y) = x^\circ \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^\circ h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right), n \in \mathbf{N} \text{ के किसी भी मान के लिए}$$

अथवा $$F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right), n \in \mathbf{N}$$

इसलिए एक फलन $F(x, y)$, n घात वाला समघातीय फलन कहलाता है यदि

$$F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{अथवा} \quad y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ के रूप वाला अवकल समीकरण समघातीय कहलाता है यदि $F(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots (1)$$

के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम $\frac{y}{x} = v$ अर्थात्

$$y = v\,x \quad \ldots (2)$$

प्रतिस्थापित करते हैं

समीकरण (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots (3)$$

समीकरण (3) से $\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

अर्थात् $$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \ldots (4)$$

समीकरण (4) में चरों को पृथक् करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad \ldots (5)$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + C \quad \ldots (6)$$

यदि v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो समीकरण (6), अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल प्रदान करता है।

टिप्पणी यदि समघातीय अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y)$ के रूप में है। जहाँ $\mathrm{F}(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है तो हम $\frac{x}{y} = v$ अर्थात, $x = vy$ प्रतिस्थापित करते हैं और फिर उपरोक्त चर्चा के अनुसार $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप में लिखकर व्यापक हल ज्ञात करने के लिए आगे बढ़ते हैं।

उदाहरण 10 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} \qquad \ldots (1)$$

मान लीजिए $\mathrm{F}(x, y) = \frac{x+2y}{x-y}$

अब $\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x+2y)}{\lambda(x-y)} = \lambda^{\circ} \cdot \mathrm{F}(x, y)$

इसलिए $\mathrm{F}(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है।

विकल्पत:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) का दायाँ पक्ष $g\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में है इसलिए यह शून्य घात वाला एक समघातीय फलन है। इसलिए समीकरण (1) एक समघातीय अवकल समीकरण है।

इसको हल करने के लिए हम प्रतिस्थापन करते हैः

$$y = vx \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{... (4)}$$

समीकरण (1) में y एवं $\frac{dy}{dx}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

अर्थात् $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

अर्थात् $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

अर्थात् $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \text{... (5)}$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

अथवा $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

v को $\frac{y}{x}$, से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

अथवा $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

अथवा $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 11 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

यहाँ $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$ के रूप का अवकल समीकरण है।

यहाँ $F(x, y)=\dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ है।

x को λx से एवं y को λy से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0[F(x,y)]$$

$F(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है, इसलिए दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है। इसको हल करने के लिए हम प्रतिस्थापन करते हैं:

$$y = vx \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{... (3)}$$

समीकरण (1) में y एवं $\frac{dy}{dx}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v}$$

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v} - v$$

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

अथवा $$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$$

इसलिए $$\int \cos v\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

अथवा $$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

अथवा $$\sin v = \log|Cx|$$

v को $\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 12 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2y\,e^{\frac{x}{y}}dx + (y - 2x\,e^{\frac{x}{y}})\,dy = 0$ समघातीय है और यदि, $x = 0$ जब $y = 1$ दिया हुआ हो तो इस समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\,e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\,e^{\frac{x}{y}}} \qquad \ldots (1)$$

मान लीजिए $\mathrm{F}(x, y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$ तब $\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^{\circ}[\mathrm{F}(x, y)]$

अत: $\mathrm{F}(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

इसलिए, दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है।

इसका हल ज्ञात करने के लिए, हम $x = vy$ प्रतिस्थापन करते हैं।

समीकरण (2) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

समीकरण (1) में x एवं $\dfrac{dx}{dy}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

अथवा $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

अथवा $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

अथवा $$2e^{v}dv = \frac{-dy}{y}$$

अथवा $$\int 2e^{v}.\,dv = -\int \frac{dy}{y}$$

अथवा $$2\,e^{v} = -\log|y| + C$$

v को $\frac{x}{y}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = C \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) में, $x = 0$ एवं $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\,e^{0} + \log|1| = C \Rightarrow C = 2$$

C का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल है।

उदाहरण 13 दर्शाइए कि वक्रों का कुल, जिनके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ है, $x^2 - y^2 = cx$ द्वारा प्रदत्त है।

हल हम जानते हैं कि एक वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है।

इसलिए $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \text{ या } \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \ldots (1)$$

स्पष्टत: समीकरण (1) समघातीय अवकल समीकरण है।

इसको हल करने के लिए हम $y = vx$ प्रतिस्थापन करते हैं।

$y = vx$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ या } v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

अत: $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v} \text{ या } \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x} \text{ या } \frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

इसलिए $$\int \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

अथवा $$\log|v^2-1| = -\log|x| + \log|C_1|$$

अथवा $$\log|(v^2-1)(x)| = \log|C_1|$$

अथवा $$(v^2 - 1)\,x = \pm\, C_1$$

v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm C_1$$

अथवा $$(y^2 - x^2) = \pm\, C_1\, x \text{ या } x^2 - y^2 = Cx$$

प्रश्नावली 9.4

1 से 10 तक के प्रत्येक प्रश्न में दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए:

1. $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

2. $y' = \frac{x+y}{x}$

3. $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$

4. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

5. $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

7. $\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}y\,dx = \left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

8. $x\frac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

9. $y\,dx + x\log\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$

10. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$

11 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

11. $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$

12. $x^2\,dy + (xy + y^2)\,dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$

13. $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx + x\,dy = 0;\ y = \frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$

14. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0;\ y = 0$ यदि $x = 1$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0;\ y = 2$ यदि $x = 1$

16. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन सा प्रतिस्थापन किया जाता है:

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. निम्नलिखित में से कौन सा समघातीय अवकल समीकरण है?

(A) $(4x + 6y + 5)\,dy - (3y + 2x + 4)\,dx = 0$

(B) $(xy)\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

(D) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$

9.4.3 *रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equations)*

$$\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q},$$

के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P एवं Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है। प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x\log x}\right) = \frac{1}{x}$$

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का दूसरा रूप सेकेंड $\frac{dx}{dy} + \text{P}_1 x = \text{Q}_1$ है, जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरण के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं: $$\frac{dx}{dy} + x = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{-2x}{y}=y^2e^{-y}$$

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q} \qquad \ldots (1)$$

को हल करने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों को x के फलन $g\,(x)$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g\,(x)\,y=\mathrm{Q}\,.\,g\,(x) \qquad \ldots (2)$$

$g\,(x)$ का चयन इस प्रकार कीजिए ताकि समीकरण का बायाँ पक्ष $y\,.\,g\,(x)$ का अवकलज बन जाए:

अर्थात् $$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g\,(x)\,y=\frac{d}{dx}\,[y\,.\,g\,(x)]$$

अथवा $$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g\,(x)\,y=g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+y\,g'\,(x)$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{P}.\,g\,(x)=g'\,(x)$$

अथवा $$\mathrm{P}=\frac{g'(x)}{g\,(x)}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \mathrm{P}dx=\int \frac{g'(x)}{g\,(x)}\,dx$$

अथवा $$\int \mathrm{P}.dx=\log\left(g\,(x)\right)$$

अथवा $$g\,(x)=e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

समीकरण (1) को $g(x)=e^{\int pdx}$ से गुणा करने पर उस समीकरण का बायाँ पक्ष x तथा y के किसी फलन का अवकलज बन जाता है। यह फलन $g(x)=e^{\int pdx}$ दिए हुए अवकल समीकरण का **समाकलन गुणक (I.F.)** कहलाता है।

समीकरण (2) में $g\,(x)$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$e^{\int pdx}\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,e^{\int pdx}\,y=\mathrm{Q}.\,e^{\int pdx}$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int \mathrm{P}dx}\right)=\mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y \cdot e^{\int P\,dx} = \int \left(Q \cdot e^{\int P\,dx} \right) dx$$

अथवा $$y = e^{-\int P\,dx} \cdot \int \left(Q \cdot e^{\int P\,dx} \right) dx + C$$

यह अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए सम्मिलित चरण:

(i) दिए हुए अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप में लिखिए जिसमें P, Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं।

(ii) समाकलन गुणक (I.F.) = $e^{\int P\,dx}$ ज्ञात कीजिए।

(iii) दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रूप में लिखिए:

$$y \text{ . (I.F.)} = \int (Q \times \text{I.F.})\,dx + C$$

यदि प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ के रूप में है जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं, तब I.F. = $e^{\int P_1\,dy}$ और

$$x \text{ . (I.F.)} = \int (Q_1 \times \text{I.F.})\,dy + C$$ अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण 14 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$ है, जहाँ $P = -1$ और $Q = \cos x$

इसलिए $\text{I.F.} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$

समीकरण के दोनों पक्षों को I.F. से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\left(y e^{-x} \right) = e^{-x}\cos x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y\,e^{-x} = \int e^{-x}\cos x\,dx + C \qquad \ldots (1)$$

मान लीजिए कि $\quad I = \int e^{-x}\cos x\,dx$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int (-\sin x)\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \int \sin x\,e^{-x}\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \left[\sin x(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\,dx\right]$$

$$= -\cos x\,e^{-x} + \sin x\,e^{-x} - \int \cos x\,e^{-x}\,dx$$

अथवा $\quad I = -\,e^{-x}\cos x + \sin x\,e^{-x} - I$

अथवा $\quad 2I = (\sin x - \cos x)\,e^{-x}$

अथवा $\quad I = \dfrac{(\sin x - \cos x)\,e^{-x}}{2}$

समीकरण (1) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y\,e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + C$$

अथवा $\quad y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + C\,e^{x}$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 15 अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण है:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को x से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

यह, $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $P = \dfrac{2}{x}$ एवं $Q = x$ है।

इसलिए $\quad$ I.F. $= e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2 \qquad$ [जैसा कि $e^{\log f(x)} = f(x)$]

इसलिए दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y \cdot x^2 = \int (x)(x^2)\,dx + C = \int x^3 dx + C$$

अथवा $$y = \frac{x^2}{4} + C\,x^{-2}$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 16 अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

यह, $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$, के रूप वाला रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $P_1 = -\frac{1}{y}$ एवं $Q_1 = 2y$ है। इसलिए $\text{I.F.} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

अत: दिए हुए अवकल समीकरण का हल है:

$$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right) dy + C$$

अथवा $$\frac{x}{y} = \int 2dy + C$$

अथवा $$\frac{x}{y} = 2y + C$$

अथवा $$x = 2y^2 + Cy$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 17 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$

हल दिया हुआ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ

$P = \cot x$ और $Q = 2x + x^2 \cot x$ है। इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

अत: अवकल समीकरण का हल है:

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = \sin x \left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x \left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = x^2 \sin x + C \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) में $y = 0$ एवं $x = \frac{\pi}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

अथवा $$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

समीकरण (1) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

अथवा $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \; (\sin x \neq 0)$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का विशिष्ट हल है।

उदाहरण 18 बिन्दु (0, 1) से गुजरने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए, यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, उस बिंदु के x निर्देशांक (भुज) तथा x निर्देशांक और y निर्देशांक (कोटि) के गुणनफल के योग के बराबर है।

हल हम जानते हैं कि वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1), $\frac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q}$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $\text{P}=-x$ एवं $\text{Q} = x$ है। इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

अत: दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y.e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)dx + \text{C} \quad \ldots (2)$$

मान लीजिए $\text{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$

मान लीजिए $\frac{-x^2}{2} = t$, तब $-x\,dx = dt$ या $x\,dx = -dt$

इसलिए $\text{I} = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{\frac{-x^2}{2}}$

समीकरण (2) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$y\,e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \text{C}$$

अथवा $$y = -1 + \text{C}\,e^{\frac{x^2}{2}} \quad \ldots (3)$$

समीकरण (3) वक्रों के कुल का समीकरण है परंतु हम इस कुल के ऐसे सदस्य का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो बिंदु (0, 1) से गुजरता हो। समीकरण (3) में $x = 0$ एवं $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

$$1 = -1 + \text{C}\,.\,e^{0} \text{ अथवा } \text{C} = 2$$

समीकरण (3) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y = -1 + 2\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

यह वक्र का अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नावली 9.5

1 से 12 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\,y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ **5.** $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$

7. $x\log x\frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$

9. $x\frac{dy}{dx}+y-x+xy\cot x=0\ \ (x\neq 0)$

10. $(x+y)\frac{dy}{dx}=1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$

12. $(x+3y^2)\frac{dy}{dx}=y\ \ (y>0)$.

13 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए:

13. $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x;\ y=0$ यदि $x=\frac{\pi}{3}$

14. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2};\ y=0$ यदि $x=1$

15. $\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x;\ y=2$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$

16. मूल बिंदु से गुज़रने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के निर्देशांकों के योग के बराबर है।

17. बिंदु (0, 2) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु के निर्देशांकों का योग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिमाण से 5 अधिक है।

18. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणक है:

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\frac{1}{x}$ (D) x

19. अवकल समीकरण $(1-y^2)\frac{dx}{dy}+yx = ay\ (-1<y<1)$ का समाकलन गुणक है:

(A) $\frac{1}{y^2-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\frac{1}{1-y^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, जहाँ c_1, c_2 स्वेच्छ अचर है, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right) y = 0$$ का हल है।

हल दिया हुआ फलन है:

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[-bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx\right] + \left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] e^{ax}.a$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\,(-\sin bx\,.\,b) + (ac_2 - bc_1)\,(\cos bx\,.\,b)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2 c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2 c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

दिए गए अवकल समीकरण में $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ एवं y का मान प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

बायाँ पक्ष $$= e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$- 2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+ (a^2 + b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\begin{bmatrix} \left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0\cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0$$ = दायाँ पक्ष

इसलिए दिया हुआ फलन दिए हुए अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण 20 अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{4y} \qquad \ldots (1)$$

चरों को पृथक् करने पर हम पाते हैं,

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x} dx$$

इसलिए $$\int e^{-4y} dy = \int e^{3x} dx$$

अथवा $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + \mathrm{C}$$

अथवा $$4\, e^{3x} + 3\, e^{-4y} + 12\, \mathrm{C} = 0 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) में $x = 0$ एवं $y = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

$$4 + 3 + 12\, \mathrm{C} = 0 \text{ अथवा } \mathrm{C} = \frac{-7}{12}$$

समीकरण (2) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम,

$$4\, e^{3x} + 3\, e^{-4y} - 7 = 0, \text{ प्राप्त करते हैं}$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल है।

उदाहरण 21 अवकल समीकरण

$$(x\, dy - y\, dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\, dx + x\, dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \text{ को हल कीजिए।}$$

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$\left[x y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = \left[xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$

अथवा
$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

दायें पक्ष पर अंश एवं हर दोनों को x^2 से भाग देने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots (1)$$

स्पष्टत: समीकरण (1), $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का समघातीय अवकल समीकरण है, इसलिए इस समीकरण को हल करने के लिए हम

$$y = vx \quad \ldots (2)$$

प्रतिस्थापित करते हैं।

अथवा $$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

अथवा $$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+v^2\sin v}{v\sin v-\cos v}$$ [समीकरण (1) और (2) का प्रयोग करने पर]

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$$

अथवा $$\left(\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}\right) dv = \frac{2\,dx}{x}$$

इसलिए $$\int \left(\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}\right)dv=2\int\frac{1}{x}\,dx$$

अथवा $$\int\tan v\,dv-\int\frac{1}{v}\,dv=2\int\frac{1}{x}\,dx$$

अथवा $$\log|\sec v|-\log|v|=2\log|x|+\log|\mathrm{C}_1|$$

अथवा $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right|=\log|\mathrm{C}_1|$$

अथवा $$\frac{\sec v}{v\,x^2}=\pm\,\mathrm{C}_1 \quad \ldots (3)$$

समीकरण (3) में v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = \mathrm{C}, \text{ जहाँ } \mathrm{C} = \pm \mathrm{C}_1$$

अथवा $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{C}\, xy$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 22 अवकल समीकरण

$(\tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1), $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1\, x = \mathrm{Q}_1$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{1+y^2} \text{ एवं } \mathrm{Q}_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \text{ है। इसलिए}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

इसलिए दिए हुए अवकल समीकरण का हल है:

$$x\, e^{\tan^{-1} y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy + \mathrm{C} \qquad \ldots (2)$$

मान लीजिए $$\mathrm{I} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy$$

$\tan^{-1} y = t$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि $\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$

अतः $\quad I = \int t\, e^t dt,\ I = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, et,\ I = t\, e^t - e^t = e^t\,(t-1)$

अथवा $\quad I = e^{\tan^{-1} y}\,(\tan^{-1} y - 1)$

समीकरण (2) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर हम

$$x\,.\,e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1) + C$$ पाते हैं

अथवा $\quad x = (\tan^{-1} y - 1) + C\, e^{-\tan^{-1} y}$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 5x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ $\qquad$ (ii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

(iii) $\dfrac{d^4 y}{dx^4} - \sin\left(\dfrac{d^3 y}{dx^3}\right) = 0$

2. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक के लिए सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (अस्पष्ट अथवा स्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है।

(i) $xy = a\, e^x + b\, e^{-x} + x^2$ $\quad$: $\quad x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a \cos x + b \sin x)$ $\quad$: $\quad \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x \sin 3x$ $\quad$: $\quad \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 9\, y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$ $\quad$: $\quad (x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

3. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ जहाँ c एक प्राचल है, अवकल समीकरण $(x^3 - 3x\, y^2)\, dx = (y^3 - 3x^2 y)\, dy$ का व्यापक हल है।

4. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, जबकि $x \neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$ का व्यापक हल $(x + y + 1) = \text{A}\,(1 - x - y - 2xy)$ है, जिसमें A एक प्राचल है।

6. बिंदु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ है।

7. अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 1$ यदि $x = 0$.

8. अवकल समीकरण $y\, e^{\frac{x}{y}} dx = \left(x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy\ (y \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

9. अवकल समीकरण $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = -1$, यदि $x = 0$ (संकेत: $x - y = t$ रखें)।

10. अवकल समीकरण $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy}=1\ (x \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x = 4x \operatorname{cosec} x\ (x \neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$.

12. अवकल समीकरण $(x + 1)\,\frac{dy}{dx} = 2\, e^{-y} - 1$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$.

13. अवकल समीकरण $\frac{y\, dx - x\, dy}{y}=0$ का व्यापक हल है:

(A) $xy = \text{C}$ (B) $x = \text{C}y^2$ (C) $y = \text{C}x$ (D) $y = \text{C}x^2$

14. $\frac{dx}{dy}+\text{P}_1 x=\text{Q}_1$ के रूप वाले अवकल समीकरण का व्यापक हल है:

(A) $y\, e^{\int \text{P}_1 dy}=\int\left(\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dy}\right) dy+\text{C}$

(B) $y\,.\,e^{\int \text{P}_1 dx}=\int\left(\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dx}\right) dx+\text{C}$

(C) $x\,e^{\int P_1\,dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\,dy}\right) dy + C$

(D) $x\,e^{\int P_1\,dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\,dx}\right) dx + C$

15. अवकल समीकरण $e^x\,dy + (y\,e^x + 2x)\,dx = 0$ का व्यापक हल है:
(A) $x\,e^y + x^2 = C$ (B) $x\,e^y + y^2 = C$ (C) $y\,e^x + x^2 = C$ (D) $y\,e^y + x^2 = C$

सारांश

- एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज (अवकलजों) सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।
- किसी अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम अवकलज की कोटि, उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।
- यदि कोई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण हैं तो उस अवकल समीकरण की घात परिभाषित होती है।
- किसी अवकल समीकरण की घात (यदि परिभाषित हो) उस अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम कोटि अवकलज की उच्चतम घात (केवल धनात्मक पूर्णांक) होती है।
- एक दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करने वाला फलन उस अवकल समीकरण का हल कहलाता है। एक ऐसा हल जिसमें उतने ही स्वेच्छ अचर हों, जितनी उस अवकल समीकरण की कोटि है, व्यापक हल कहलाता है और स्वेच्छ अचरों से मुक्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।
- एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसको $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ अथवा $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $f(x, y)$ एवं $g(x, y)$ शून्य घात वाले समघातीय फलन हैं, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।
- $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P तथा Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अवकल समीकरण विज्ञान की प्रमुख भाषाओं में से एक है। रोचक तथ्य यह है कि अवकल समीकरणों का अस्तित्व नवंबर 11, 1675 Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ने सर्वप्रथम सर्वसमिका, $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, को लिखित रूप में प्रस्तुत किया तथा

उनसे दोनों प्रतीकों $\int$ और dy से परिचित कराया। वस्तुतः Leibnitz ऐसी वक्र को ज्ञात करने की समस्या में मग्न थे जिसकी स्पर्श रेखा निर्दिष्ट हों, इस समस्या ने सन् 1691 में उन्हें 'चरों के पृथक्करणीय विधि' के अन्वेषण का मार्गदर्शन कराया। एक वर्ष पश्चात् उन्होंने 'प्रथम कोटि के समघातीय समीकरणों के हल करने की विधि' का सूत्रीकरण किया। वे आगे बढ़े और अल्प समय में उन्होंने 'प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधि' का अन्वेषण किया। कितना आश्चर्यजनक है कि उपर्युक्त सभी विधियों की खोज अकेले एक व्यक्ति द्वारा अवकल समीकरणों के जन्म के पच्चीस वर्षों के अल्पावधि के अंतर्गत संपन्न हुई।

प्रारंभ में केवल समीकरणों के 'हल' करने की प्रविधि को अवकल समीकरणों के 'समाकलन' के रूप में निर्दिश्ट किया गया था। यह शब्द सन् 1690 में प्रथमतः James Bernoulli, (1654-1705) द्वारा प्रचलन में लाया गया। शब्द 'हल' का सर्वप्रथम प्रयोग Joseph Louis Lagrange (1736-1813), द्वारा सन् 1774 में किया गया। यह घटना अवकल समीकरणों के जन्म से लगभग 100 वर्षों बाद घटित हुई। ये Jules Henri Poincare (1854-1912), थे, जिन्होंने शब्द 'हल' के प्रयोग के लिए अकाट्य तर्क प्रस्तुत किया, फलतः आधुनिक शब्दावली में शब्द हल को अपना उचित स्थान प्राप्त हुआ। 'चरों के पृथ्क्करणीय विधि का नामकरण John Bernoulli (1667-1748), James Bernoulli के अनुज द्वारा किया गया। मई 20, 1715 को Leibnitz को लिखे अपने पत्र में, उन्होने निम्नलिखित अवकल समीकरण के हल की खोज किए

$$x^2 y'' = 2y$$

के हल तीन प्रकार की वक्रों नामतः परवलय, अतिपरवलय और घनीय वक्रों के एक समूह का मार्गदर्शन कराते हैं। यह दर्शाता है कि ऐसे सरल दिखाई पड़ने वाले अवकल समीकरणों के हल कैसे नाना रूप धारण करते हैं। 20वीं शताब्दी के उतरार्ध में 'अवकल समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण' शीर्षक के अंतर्गत अवकल समीकरणों के हलों की जटिल प्रकृति के आविष्कार हेतु ध्यान आकर्षित किया गया। आजकल इसने लगभग सभी अविष्कारों हेतु अत्यंत प्रविधि के रूप में प्रमुख स्थान प्राप्त कर लिया है।

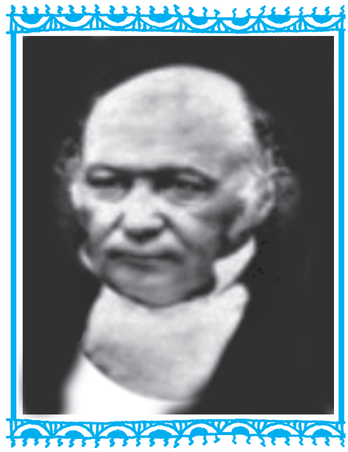
12082CH10

अध्याय 10

सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

10.1 भूमिका (Introduction)



W.R. Hamilton
(1805-1865)

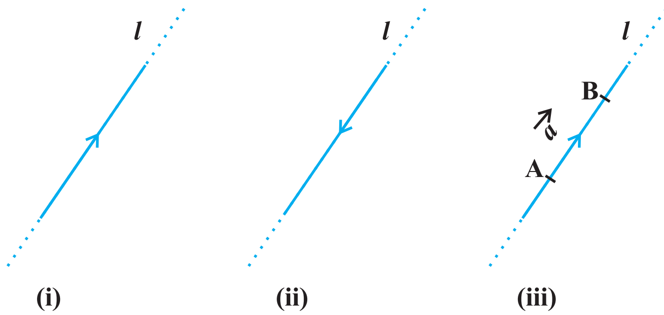
अपने दैनिक जीवन में हमें अनेक प्रश्न मिलते हैं जैसे कि आपकी ऊँचाई क्या है? एक फुटबाल के खिलाड़ी को अपनी ही टीम के दूसरे खिलाड़ी के पास गेंद पहुँचाने के लिए गेंद पर किस प्रकार प्रहार करना चाहिए? अवलोकन कीजिए कि प्रथम प्रश्न का संभावित उत्तर 1.6 मीटर हो सकता है। यह एक ऐसी राशि है जिसमें केवल एक मान परिमाण जो एक वास्तविक संख्या है, सम्मिलित है। ऐसी राशियाँ अदिश कहलाती है। तथापि दूसरे प्रश्न का उत्तर एक ऐसी राशि है (जिसे बल कहते हैं) जिसमें मांसपेशियों की शक्ति परिमाण के साथ-साथ दिशा (जिसमें दूसरा खिलाड़ी स्थित है) भी सम्मिलित है। ऐसी राशियाँ सदिश कहलाती है। गणित, भौतिकी एवं अभियांत्रिकी में ये दोनों प्रकार की राशियाँ नामत: अदिश राशियाँ, जैसे कि लंबाई, द्रव्यमान, समय, दूरी, गति, क्षेत्रफल, आयतन, तापमान, कार्य, धन, वोल्टता, घनत्व, प्रतिरोधक इत्यादि एवं सदिश राशियाँ जैसे कि विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार, संवेग, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता इत्यादि बहुधा मिलती हैं।

इस अध्याय में हम सदिशों की कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ, सदिशों की विभिन्न संक्रियाएँ और इनके बीजीय एवं ज्यामितीय गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। इन दोनों प्रकार के गुणधर्मों का सम्मिलित रूप सदिशों की संकल्पना का पूर्ण अनुभूति देता है और उपर्युक्त चर्चित क्षेत्रों में इनकी विशाल उपयोगिता की ओर प्रेरित करता है।

10.2 कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ (Some Basic Concepts)

मान लीजिए कि किसी तल अथवा त्रि-विमीय अंतरिक्ष में l कोई सरल रेखा है। तीर के निशानों की सहायता से इस रेखा को दो दिशाएँ प्रदान की जा सकती हैं। इन दोनों में से निश्चित दिशा वाली कोई

भी एक रेखा दिष्ट रेखा कहलाती है [आकृति 10.1 (i), (ii)]।



आकृति 10.1

अब प्रेक्षित कीजिए कि यदि हम रेखा 'l' को रेखाखंड AB तक प्रतिबंधित कर देते हैं तब दोनों मे से किसी एक दिशा वाली रेखा 'l' पर परिमाण निर्धारित हो जाता है। इस प्रकार हमें एक दिष्ट रेखाखंड प्राप्त होता है (आकृति 10.1(iii))। अतः एक दिष्ट रेखाखंड में परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं।

परिभाषा 1 एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश कहलाती है।

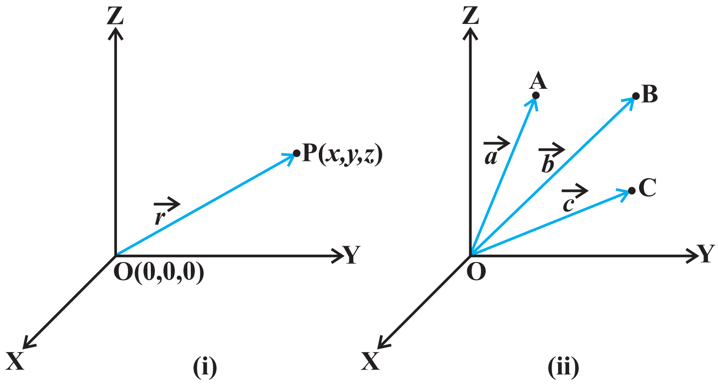
ध्यान दीजिए कि एक दिष्ट रेखाखंड सदिश होता है (आकृति 10.1(iii)), जिसे $\overrightarrow{AB}$ अथवा साधारणतः $\vec{a}$, के रूप में निर्दिष्ट करते हैं और इसे सदिश '$\overrightarrow{AB}$' अथवा सदिश '$\vec{a}$' के रूप में पढ़ते हैं।

वह बिंदु A जहाँ से सदिश $\overrightarrow{AB}$ प्रारंभ होता है, प्रारंभिक बिंदु कहलाता है और वह बिंदु B जहाँ पर सदिश $\overrightarrow{AB}$, समाप्त होता है अंतिम बिंदु कहलाता है। किसी सदिश के प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदुओं के बीच की दूरी सदिश का परिमाण (अथवा लंबाई) कहलाता है और इसे $|\overrightarrow{AB}|$ अथवा $|\vec{a}|$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। तीर का निशान सदिश की दिशा को निर्दिष्ट करता है।

> **टिप्पणी** क्योंकि लंबाई कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है इसलिए संकेतन $|\vec{a}| < 0$ का कोई अर्थ नहीं है।

स्थिति सदिश (Position Vector)

कक्षा XI से, त्रि-विमीय दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति को स्मरण कीजिए (आकृति 10.2 (i))। अंतरिक्ष में मूल बिंदु O(0, 0, 0) के सापेक्ष एक ऐसा बिंदु P लीजिए जिसके निर्देशांक (x, y, z) है। तब सदिश $\overrightarrow{OP}$ जिसमें O और P क्रमशः प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु हैं, O के



आकृति 10.2

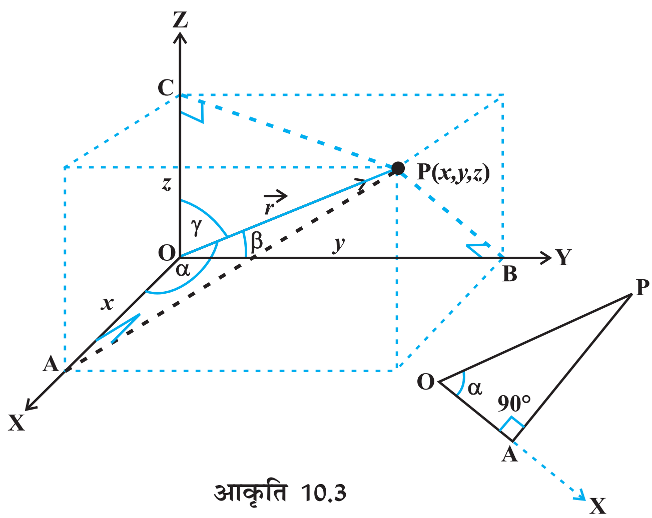
सापेक्ष बिंदु P का स्थिति सदिश कहलाता है। दूरी सूत्र (कक्षा XI से) का उपयोग करते हुए $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) का परिमाण निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

व्यवहार में मूल बिंदु O के सापेक्ष, बिंदुओं A, B, C इत्यादि के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ से निर्दिष्ट किए जाते हैं [आकृति 10.2(ii)]।

दिक्-कोसाइन (Direction Cosines)

एक बिंदु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) लीजिए जैसा कि आकृति 10.3 में दर्शाया गया है। सदिश $\vec{r}$ द्वारा x, y एवं z-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाए गए क्रमशः कोण



आकृति 10.3

$\alpha, \beta,$ एवं γ दिशा कोण कहलाते हैं। इन कोणों के कोसाइन मान अर्थात् $\cos\alpha, \cos\beta$ एवं $\cos\gamma$ सदिश $\vec{r}$ के दिक्-कोसाइन कहलाते हैं और सामान्यत: इनको क्रमश: l, m एवं n से निर्दिष्ट किया जाता है।

आकृति 10.3, से हम देखते हैं कि त्रिभुज OAP एक समकोण त्रिभुज है और इस त्रिभुज से हम $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\left(r \text{ को } |\vec{r}| \text{ के लिए प्रयोग किया गया है}\right)$ प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार समकोण त्रिभुजों OBP एवं OCP से हम $\cos\beta = \dfrac{y}{r}$ एवं $\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$ लिख सकते हैं। इस प्रकार बिंदु P के निर्देशांकों को (lr, mr, nr) के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। दिक्-कोसाइन के समानुपाती संख्याएँ lr, mr एवं nr सदिश $\vec{r}$ के दिक्-अनुपात कहलाते हैं और इनको क्रमश: a, b तथा c से निर्दिष्ट किया जाता है।

टिप्पणी हम नोट कर सकते हैं कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ परंतु सामान्यत: $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

10.3 सदिशों के प्रकार (Types of Vectors)

शून्य सदिश [Zero (null) Vector] एक सदिश जिसके प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु संपाती होते हैं, शून्य सदिश कहलाता है और इसे $\vec{0}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। शून्य सदिश को कोई निश्चित दिशा प्रदान नहीं की जा सकती क्योंकि इसका परिमाण शून्य होता है अथवा विकल्पत: इसको कोई भी दिशा धारण किए हुए माना जा सकता है। सदिश $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश को निरूपित करते हैं।

मात्रक सदिश (Unit Vector) एक सदिश जिसका परिमाण एक (अथवा 1 इकाई) है मात्रक सदिश कहलाता है। किसी दिए हुए सदिश $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को $\hat{a}$ से निर्दिष्ट किया जाता है।

सह-आदिम सदिश (Co-initial Vectors) दो अथवा अधिक सदिश जिनका एक ही प्रारंभिक बिंदु है, सह आदिम सदिश कहलाते हैं।

संरेख सदिश (Collinear Vectors) दो अथवा अधिक सदिश यदि एक ही रेखा के समांतर है तो वे संरेख सदिश कहलाते हैं।

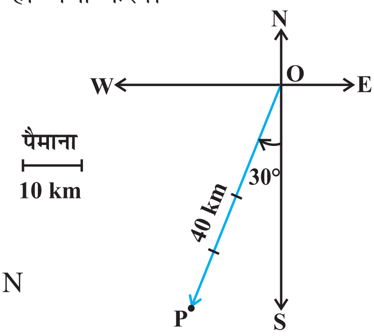
समान सदिश (Equal Vectors) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते हैं यदि उनके परिमाण एवं दिशा समान हैं। इनको $\vec{a} = \vec{b}$ के रूप में लिखा जाता है।

ऋणात्मक सदिश (Negative of a Vector) एक सदिश जिसका परिमाण दिए हुए सदिश (मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$) के समान है परंतु जिसकी दिशा दिए हुए सदिश की दिशा के विपरीत है, दिए हुए सदिश का ऋणात्मक कहलाता है। उदाहरणत: सदिश $\overrightarrow{BA}$, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का ऋणात्मक है और इसे $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ के रूप में लिखा जाता है।

टिप्पणी उपर्युक्त परिभाषित सदिश इस प्रकार है कि उनमें से किसी को भी उसके परिमाण एवं दिशा को परिवर्तित किए बिना स्वयं के समांतर विस्थापित किया जा सकता है। इस प्रकार के सदिश स्वतंत्र सदिश कहलाते हैं। इस पूरे अध्याय में हम स्वतंत्र सदिशों की ही चर्चा करेंगे।

उदाहरण 1 दक्षिण से 30° पश्चिम में, 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

हल सदिश $\overrightarrow{OP}$ अभीष्ट विस्थापन को निरूपित करता है (आकृति 10.4 देखिए)।



आकृति 10.4

उदाहरण 2 निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

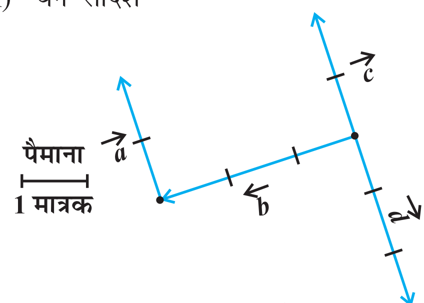
(i) 5 s (ii) 1000 cm^3 (iii) 10 N
(iv) 30 km/h (v) 10 g/cm^3
(vi) 20 m/s उत्तर की ओर

हल

(i) समय–अदिश (ii) आयतन–अदिश (iii) बल–सदिश
(iv) गति–अदिश (v) घनत्व–अदिश (vi) वेग–सदिश

उदाहरण 3 आकृति 10.5 में कौन से सदिश

(i) संरेख हैं
(ii) समान हैं
(iii) सह–आदिम हैं



आकृति 10.5

हल

(i) संरेख सदिश : $\vec{a}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$
(ii) समान सदिश : $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$
(iii) सह–आदिम सदिश : $\vec{b}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$

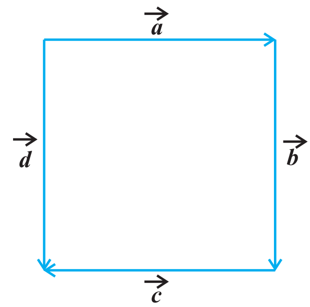
प्रश्नावली 10.1

1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।
2. निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।
   (i) 10 kg (ii) 2 मीटर उत्तर-पश्चिम (iii) 40°
   (iv) 40 वाट (v) 10^{-19} कूलंब (vi) 20 m/s^2
3. निम्नलिखित को अदिश एवं सदिश राशियों के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।
   (i) समय कालांश (ii) दूरी (iii) बल
   (iv) वेग (v) कार्य

4. आकृति 10.6 (एक वर्ग) में निम्नलिखित सदिशों को पहचानिए।

   (i) सह–आदिम (ii) समान

   (iii) संरेख परंतु असमान



आकृति 10.6

5. निम्नलिखित का उत्तर सत्य अथवा असत्य के रूप में दीजिए।

   (i) $\vec{a}$ तथा $-\vec{a}$ संरेख हैं।

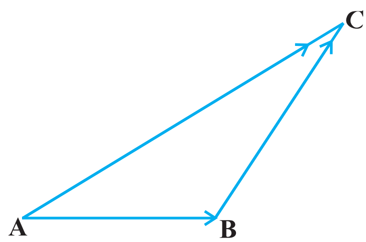
   (ii) दो संरेख सदिशों का परिमाण सदैव समान होता है।

   (iii) समान परिमाण वाले दो सदिश संरेख होते हैं।

   (iv) समान परिमाण वाले दो संरेख सदिश समान होते हैं।

10.4 सदिशों का योगफल (Addition of Vectors)

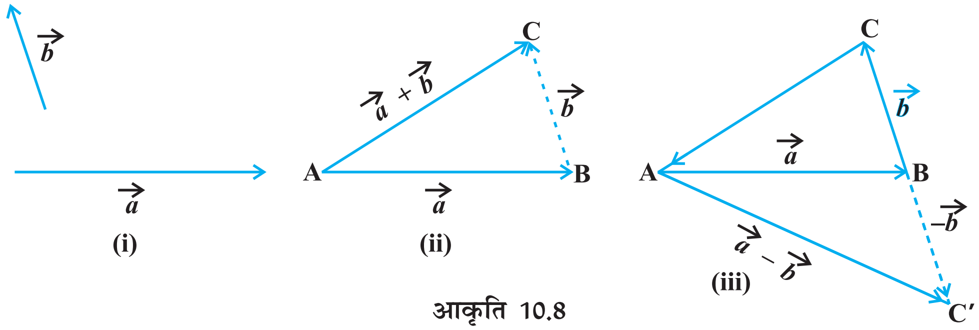
सदिश $\overrightarrow{AB}$ से साधारणतः हमारा तात्पर्य है बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापन। अब एक ऐसी स्थिति की चर्चा कीजिए जिसमें एक लड़की बिंदु A से बिंदु B तक चलती है और उसके बाद बिंदु B से बिंदु C तक चलती है (आकृति 10.7)। बिंदु A से बिंदु C तक लड़की द्वारा किया गया कुल विस्थापन सदिश, $\overrightarrow{AC}$ से प्राप्त होता है और इसे $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।



आकृति 10.7

यह सदिश योग का त्रिभुज नियम कहलाता है।

सामान्यतः, यदि हमारे पास दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं [आकृति 10.8 (i)], तो उनका योग ज्ञात करने के लिए उन्हें इस स्थिति में लाया जाता है, ताकि एक का प्रारंभिक बिंदु दूसरे के अंतिम बिंदु के संपाती हो जाए [आकृति 10.8(ii)]।



आकृति 10.8

उदाहरणतः आकृति 10.8 (ii) में, हमने सदिश $\vec{b}$ के परिमाण एवं दिशा को परिवर्तित किए बिना इस प्रकार स्थानांतरित किया है ताकि इसका प्रारंभिक बिंदु, $\vec{a}$ के अंतिम बिंदु के संपाती है तब त्रिभुज ABC की तीसरी भुजा AC द्वारा निरूपित सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ हमें सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का योग (अथवा परिणामी) प्रदान करता है, अर्थात् त्रिभुज ABC में हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [आकृति 10.8 (ii)]।

अब पुनः क्योंकि $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, इसलिए उपर्युक्त समीकरण से हम पाते हैं कि

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

इसका तात्पर्य यह है कि किसी त्रिभुज की भुजाओं को यदि एक क्रम में लिया जाए तो यह शून्य परिणामी की ओर प्रेरित करता है क्योंकि प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु संपाती हो जाते हैं [आकृति 10.8(iii)]।

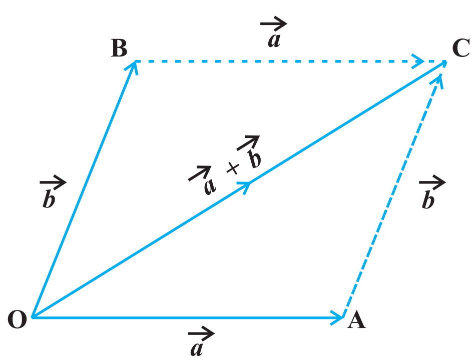
अब एक सदिश $\overrightarrow{BC'}$ की रचना इस प्रकार कीजिए ताकि इसका परिमाण सदिश $\overrightarrow{BC}$, के परिमाण के समान हो, परंतु इसकी दिशा $\overrightarrow{BC}$ की दिशा के विपरीत हो आकृति 10.8(iii) अर्थात् $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$ तब त्रिभुज नियम का अनुप्रयोग करते हुए [आकृति 10.8(iii)] से हम पाते हैं कि

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{BC}) = \vec{a}-\vec{b}$

सदिश $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के अंतर को निरूपित करता है।

अब किसी नदी के एक किनारे से दूसरे किनारे तक पानी के बहाव की दिशा के लंबवत् जाने वाली एक नाव की चर्चा करते हैं। तब इस नाव पर दो वेग सदिश कार्य कर रहे हैं, एक इंजन द्वारा नाव को दिया गया वेग और दूसरा नदी के पानी के बहाव का वेग। इन दो वेगों के युगपत प्रभाव से नाव वास्तव में एक भिन्न वेग से चलना शुरू करती है। इस नाव की प्रभावी गति एवं दिशा (अर्थात् परिणामी वेग) के बारे में यथार्थ विचार लाने के लिए हमारे पास सदिश योगफल का निम्नलिखित नियम है।

यदि हमारे पास एक समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं से निरूपित किए जाने वाले (परिमाण एवं दिशा सहित) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है (आकृति 10.9) तब समांतर चतुर्भुज की इन दोनों भुजाओं के उभयनिष्ठ बिंदु से गुजरने वाला विकर्ण इन दोनों सदिशों के योग $\vec{a}+\vec{b}$ को परिमाण एवं दिशा सहित निरूपित करता है। यह सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम कहलाता है।



आकृति 10.9

> **टिप्पणी** त्रिभुज नियम का उपयोग करते हुए आकृति 10.9 से हम नोट कर सकते हैं कि $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ या $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (क्योंकि $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$) जो कि समांतर चतुर्भुज नियम है। अत: हम कह सकते हैं कि सदिश योग के दो नियम एक दूसरे के समतुल्य हैं।

सदिश योगफल के गुणधर्म (Properties of vector addition)

गुणधर्म 1 दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए

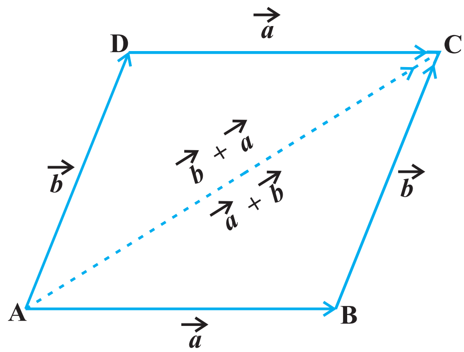
$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(क्रमविनिमयता)}$$

उपपत्ति समांतर चतुर्भुज ABCD को लीजिए (आकृति 10.10) मान लीजिए $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, तब त्रिभुज ABC में त्रिभुज नियम का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

अब, क्योंकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान एवं समांतर है, इसलिए आकृति 10.10 में $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ और $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ है। पुन: त्रिभुज ADC में त्रिभुज नियम के प्रयोग से $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$=\vec{b}+\vec{a}$

अत: $\quad \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

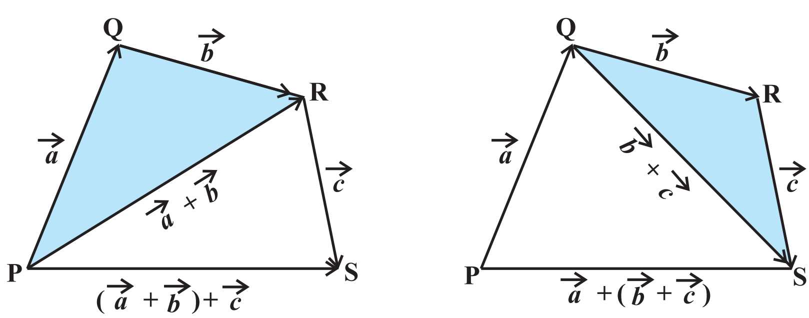


आकृति 10.10

गुणधर्म 2 तीन सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ के लिए

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(साहचर्य गुण)}$$

उपपत्ति मान लीजिए, सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को क्रमश: $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ एवं $\overrightarrow{RS}$ से निरूपित किया गया है जैसा कि आकृति 10.11(i) और (ii) में दर्शाया गया है।



(i) आकृति 10.11 (ii)

तब $$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$$

और $$\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$$

इसलिए $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$$

और $$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$$

अतः $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

टिप्पणी सदिश योगफल के साहचर्य गुणधर्म की सहायता से हम तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का योगफल कोष्ठकों का उपयोग किए बिना $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ के रूप में लिखते हैं।

नोट कीजिए कि किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए हम पाते हैं:

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

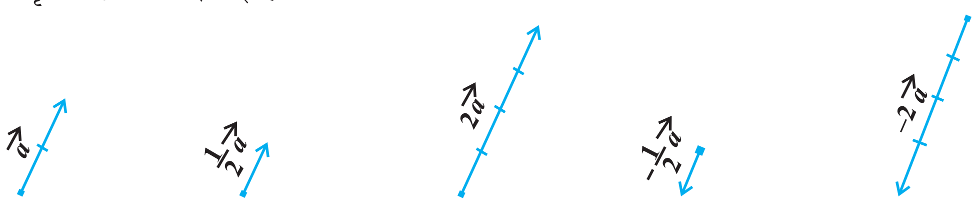
यहाँ शून्य सदिश $\vec{0}$ सदिश योगफल के लिए योज्य सर्वसमिका कहलाता है।

10.5 एक अदिश से सदिश का गुणन (Multiplication of a Vector by a Scalar)

मान लीजिए कि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है। तब सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ, से गुणनफल जिसे $\lambda\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है, सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणन कहलाता है। नोट कीजिए कि $\lambda\vec{a}$ भी सदिश $\vec{a}$ के संरेख एक सदिश है। λ के मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार $\lambda\vec{a}$ की दिशा, $\vec{a}$ के समान अथवा विपरीत होती है। $\lambda\vec{a}$ का परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का $|\lambda|$ गुणा होता है, अर्थात्

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

एक अदिश से सदिश के गुणन का ज्यामितीय चाक्षुषीकरण [रूप की कल्पना (visualisation)] आकृति 10.12 में दी गई है।



आकृति 10.12

जब $\lambda=-1$, तब $\lambda\vec{a}=-\vec{a}$ जो एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के समान है और दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत है। सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का ऋणात्मक (अथवा योज्य प्रतिलोम) कहलाता है और हम हमेशा $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ पाते हैं।

और यदि $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, दिया हुआ है कि $\vec{a} \neq 0$, अर्थात् $\vec{a}$ एक शून्य सदिश नहीं है तब

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

इस प्रकार $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को निरूपित करता है। हम इसे

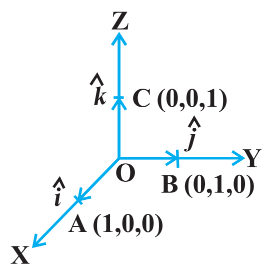
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$ के रूप में लिखते हैं।

टिप्पणी किसी भी अदिश k के लिए $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 *एक सदिश के घटक (Components of a vector)*

आईए बिंदुओं A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) और C(0, 0, 1) को क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष एवं z-अक्ष पर लेते हैं। तब स्पष्टतः

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ और } |\overrightarrow{OC}| = 1$$



आकृति 10.13

सदिश $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ जिनमें से प्रत्येक का परिमाण 1 हैं क्रमशः OX, OY और OZ अक्षों के अनुदिश मात्रक सदिश कहलाते हैं और इनको क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है (आकृति 10.13)।

अब एक बिंदु P(x, y, z) का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ लीजिए जैसा कि आकृति 10.14 में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि बिंदु P_1 से तल XOY पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु P_1 है। इस प्रकार हम देखते हैं कि P_1P, z-अक्ष के समांतर है। क्योंकि $\hat{i}$, $\hat{j}$ एवं $\hat{k}$ क्रमशः x, y एवं z-अक्ष के अनुदिश मात्रक सदिश है और P के निर्देशांकों की परिभाषा के अनुसार हम पाते हैं कि $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$. इसी प्रकार $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ और $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$. इस प्रकार हम पाते हैं कि

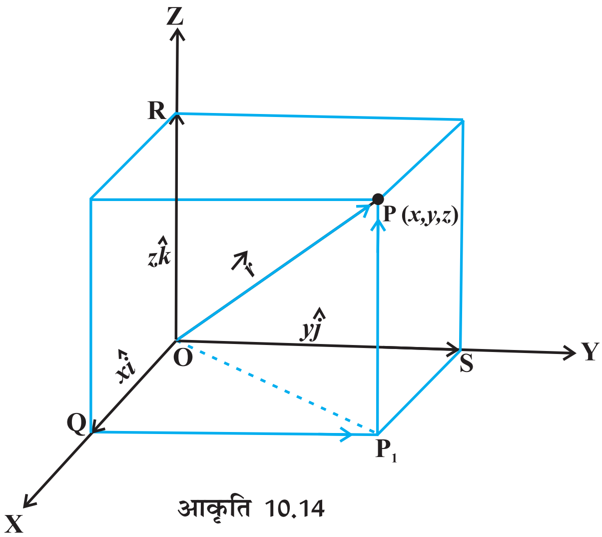
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

और

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

इस प्रकार O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

किसी भी सदिश का यह रूप घटक रूप कहलाता है। यहाँ x, y एवं z, $\vec{r}$ के अदिश घटक कहलाते हैं और $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ एवं $z\hat{k}$ क्रमागत अक्षों के अनुदिश $\vec{r}$ के सदिश घटक कहलाते हैं। कभी-कभी x, y एवं z को समकोणिक घटक भी कहा जाता है।



आकृति 10.14

किसी सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, की लंबाई पाइथागोरस प्रमेय का दो बार प्रयोग करके तुरंत ज्ञात की जा सकती है। हम नोट करते हैं कि समकोण त्रिभुज OQP_1 में (आकृति 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

और समकोण त्रिभुज OP_1P, में हम पाते हैं कि

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

अतः किसी सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ की लंबाई $|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ के रूप में प्राप्त होती है।

यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ द्वारा दिए गए हैं तो

(i) सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को योग

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

(ii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अंतर

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

(iii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होते हैं यदि और केवल यदि

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ और $a_3 = b_3$

(iv) किसी अदिश λ से सदिश $\vec{a}$ का गुणन

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ द्वारा प्रदत्त है।

सदिशों का योगफल और किसी अदिश से सदिश का गुणन सम्मिलित रूप में निम्नलिखित वितरण-नियम से मिलता है

मान लीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं और k एवं m दो अदिश हैं तब

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k + m)\vec{a}$ (ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ (iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

टिप्पणी

1. आप प्रेक्षित कर सकते हैं कि λ के किसी भी मान के लिए सदिश $\lambda\vec{a}$ हमेशा सदिश $\vec{a}$ के संरेख है। वास्तव में दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख तभी होते हैं यदि और केवल यदि एक ऐसे शून्येतर अदिश λ का अस्तित्व हैं ताकि $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ हो। यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में दिए हुए हैं, अर्थात् $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, तब दो सदिश संरेख होते हैं यदि और केवल यदि

$$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda a_2,\ b_3 = \lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

2. यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तब a_1, a_2, a_3 सदिश $\vec{a}$ के दिक्-अनुपात कहलाते हैं।
3. यदि l, m, n किसी सदिश के दिक्-कोसाइन हैं तब

$$l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$$

दिए हुए सदिश की दिशा में मात्रक सदिश है जहाँ α, β एवं γ दिए हुए सदिश द्वारा क्रमशः x, y एवं z अक्ष के साथ बनाए गए कोण हैं।

उदाहरण 4 x, y और z के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ समान हैं।

हल ध्यान दीजिए कि दो सदिश समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान है। अतः दिए हुए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होंगे यदि और केवल यदि $x = 2, y = 2, z = 1$

उदाहरण 5 मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है ? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं ?

हल यहाँ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ और $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

इसलिए $|\vec{a}| = |\vec{b}|$। परंतु दिए हुए सदिश समान नहीं हैं क्योंकि इनके संगत घटक भिन्न हैं।

उदाहरण 6 सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

इसलिए $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

उदाहरण 7 सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है।

हल दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

इसलिए $\vec{a}$ के अनुदिश और 7 परिमाण वाला सदिश $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

उदाहरण 8 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए सदिशों का योगफल

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \text{ जहाँ } \vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \text{ है।}$$

और $$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

अत: अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ है।}$$

उदाहरण 9 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्-अनुपात लिखिए और इसकी सहायता से दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

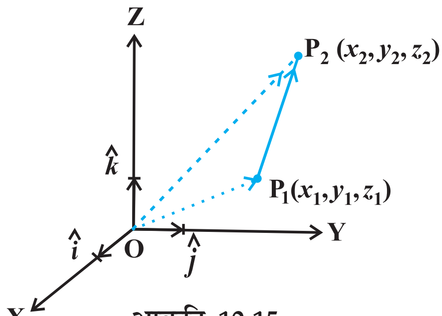
हल ध्यान दीजिए कि सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के दिक्-अनुपात a, b, c सदिश के, क्रमागत घटक x, y, z होते हैं। इसलिए दिए हुए सदिश के लिए हम पाते हैं कि $a = 1, b = 1$ और $c = -2$ है। पुन: यदि l, m और n दिए हुए सदिश के दिक्-कोसाइन हैं तो:

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \text{ (क्योंकि } |\vec{r}| = \sqrt{6})$$

अत: दिक्-कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ हैं।

10.5.2 दो बिंदुओं को मिलाने वाला सदिश (*Vector joining two points*)

यदि $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ दो बिंदु हैं तब P_1 को P_2 से मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ है (आकृति 10.15)। P_1 और P_2 को मूल बिंदु O से मिलाने पर और त्रिभुज नियम का प्रयोग करने पर हम त्रिभुज OP_1P_2 से पाते हैं कि $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



आकृति 10.15

सदिश योगफल के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

अर्थात्
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ का परिमाण $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 बिंदुओं P(2, 3, 0) एवं Q(– 1, – 2, – 4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ दिष्ट सदिश ज्ञात कीजिए।

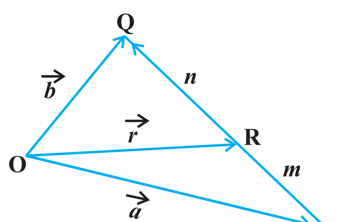
हल क्योंकि सदिश P से Q की तरफ दिष्ट है, स्पष्टत: P प्रारंभिक बिंदु है और Q अंतिम बिंदु है, इसलिए P और Q को मिलाने वाला अभीष्ट सदिश $\overrightarrow{PQ}$, निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

अर्थात्
$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 खंड सूत्र (*Section Formula*)

मान लीजिए मूल बिंदु O के सापेक्ष P और Q दो बिंदु हैं जिनको स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से निरूपित किया गया है। बिंदुओं P एवं Q को मिलाने वाला रेखा खंड किसी तीसरे बिंदु R द्वारा दो प्रकार से विभाजित किया जा सकता है। अंत: (आकृति 10.16) एवं बाह्य (आकृति 10.17)। यहाँ हमारा उद्देश्य मूल बिंदु O के सापेक्ष बिंदु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR}$ ज्ञात करना है। हम दोनों स्थितियों को एक-एक करके लेते हैं।



आकृति 10.16

स्थिति 1 जब R, PQ को अंत: विभाजित करता है (आकृति 10.16)। यदि R, $\overrightarrow{PQ}$ को इस प्रकार विभाजित करता है कि $m\,\overrightarrow{RQ} = n\,\overrightarrow{PR}$, जहाँ m और n धनात्मक अदिश हैं तो हम कहते हैं

कि बिंदु R, $\overrightarrow{PQ}$ को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है। अब त्रिभुजों ORQ एवं OPR से

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

और
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$$

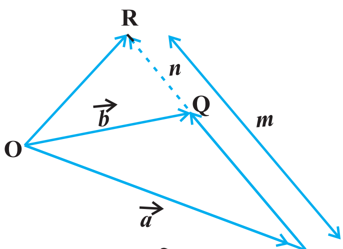
इसलिए
$$m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad \text{(क्यों?)}$$

अथवा
$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

अतः बिंदु R जो कि P और Q को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ के रूप में प्राप्त होता है।

स्थिति II जब R, PQ को बाह्य विभाजित करता है (आकृति 10.17)। यह सत्यापन करना हम पाठक के लिए एक प्रश्न के रूप में छोड़ते हैं कि रेखाखंड PQ को $m:n$ के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R $\left(\text{i.e., } \frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}\right)$ का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ के रूप में प्राप्त होता है।



आकृति 10.17

टिप्पणी यदि R, PQ का मध्य बिंदु है तो $m = n$ और इसलिए स्थिति I से $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य बिंदु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ के रूप में होगा।

उदाहरण 11 दो बिंदु P और Q लीजिए जिनके स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो P एवं Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य विभाजित करता है।

हल

(i) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

उदाहरण 12 दर्शाइए कि बिंदु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4j - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल हम पाते हैं कि

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

और
$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

अत: दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्नावली 10.2

1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए:

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

4. x और y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हों।

5. एक सदिश का प्रारंभिक बिंदु $(2, 1)$ है और अंतिम बिंदु $(-5, 7)$ है। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

7. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. सदिश $\overrightarrow{PQ}$, के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदु P और Q क्रमश: $(1, 2, 3)$ और $(4, 5, 6)$ हैं।

9. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, के लिए, सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

11. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

12. सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

13. बिंदुओं A (1, 2, –3) एवं B(–1, –2, 1) को मिलाने वाले एवं A से B की तरफ़ दिष्ट सदिश की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

14. दर्शाइए कि सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ अक्षों OX, OY एवं OZ के साथ बराबर झुका हुआ है।

15. बिंदुओं P $(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ और Q $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य, विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

16. दो बिंदुओं P(2, 3, 4) और Q(4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

17. दर्शाइए कि बिंदु A, B और C, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

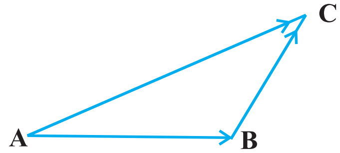
18. त्रिभुज ABC (आकृति 10.18), के लिए निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य नहीं है।

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$



आकृति 10.18

19. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख सदिश हैं तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है:

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, किसी अदिश λ के लिए

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के क्रमागत घटक समानुपाती नहीं हैं।

(D) दोनों सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ की दिशा समान है परंतु परिमाण विभिन्न हैं।

10.6 दो सदिशों का गुणनफल (Product of Two Vectors)

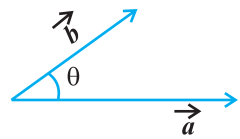
अभी तक हमने सदिशों के योगफल एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन किया है। अब हमारा उद्देश्य सदिशों का गुणनफल नामक एक दूसरी बीजीय संक्रिया की चर्चा करना है। हम स्मरण कर सकते हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल एक संख्या होती है, दो आव्यूहों का गुणनफल एक आव्यूह होता है परंतु फलनों की स्थिति में हम उन्हें दो प्रकार से गुणा कर सकते हैं नामतः दो फलनों का बिंदुवार गुणन एवं दो फलनों का संयोजन। इसी प्रकार सदिशों का गुणन भी दो तरीके से परिभाषित किया जाता है। नामतः अदिश गुणनफल जहाँ परिणाम एक अदिश होता है और सदिश गुणनफल जहाँ परिणाम एक सदिश होता है। सदिशों के इन दो प्रकार के गुणनफलों के आधार पर ज्यामिती, यांत्रिकी एवं अभियांत्रिकी में इनके विभिन्न अनुप्रयोग हैं। इस परिच्छेद में हम इन दो प्रकार के गुणनफलों की चर्चा करेंगे।

10.6.1 दो सदिशों का अदिश गुणनफल [Scalar (or dot) product of two vectors]

परिभाषा 2 दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल $\vec{a}\cdot\vec{b}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और इसे $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ के रूप मे परिभाषित किया जाता है।

जहाँ θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$, के बीच का कोण है और $0 \le \theta \le \pi$ (आकृति 10.19)।

यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$, तो θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में हम $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ परिभाषित करते हैं।



आकृति 10.19

प्रेक्षण

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ एक वास्तविक संख्या है।
2. मान लीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ यदि और केवल यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लंबवत् हैं अर्थात् $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$
3. यदि $\theta = 0$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

   विशिष्टतः $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, क्योंकि इस स्थिति में $\theta = 0$ है।
4. यदि $\theta = \pi$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

   विशिष्टतः $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, जैसा कि इस स्थिति में θ, π के बराबर है।
5. प्रेक्षण 2 एवं 3 के संदर्भ में परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ एवं $\hat{k}$, के लिए हम पाते हैं कि

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

तथा
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

6. दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ अथवा } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

7. अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय है अर्थात्

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(क्यों?)}$$

अदिश गुणनफल के दो महत्वपूर्ण गुणधर्म (Two important properties of scalar product)

गुणधर्म 1 (अदिश गुणनफल की योगफल पर वितरण नियम) मान लीजिए $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश हैं तब $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

गुणधर्म 2 मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश हैं और λ एक अदिश है, तो

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

यदि दो सदिश घटक रूप में $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ एवं $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, दिए हुए हैं तब उनका अदिश गुणनफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})\\ &\quad + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})\end{aligned}$$

(उपर्युक्त गुणधर्म 1 और 2 का उपयोग करने पर)

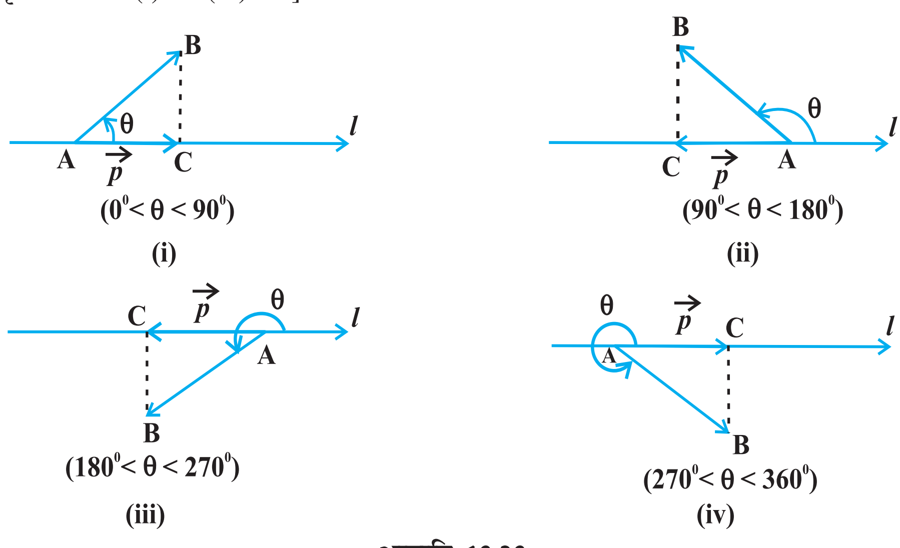
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(प्रक्षेण 5 का उपयोग करने पर)

इस प्रकार $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

10.6.2 *एक सदिश का किसी रेखा पर साथ प्रक्षेप (Projection of a vector on a line)*

मान लीजिए कि एक सदिश $\overrightarrow{AB}$ किसी दिष्ट रेखा l (मान लीजिए) के साथ वामावर्त दिशा में θ कोण बनाता है। (आकृति 10.20 देखिए) तब $\overrightarrow{AB}$ का l पर प्रक्षेप एक सदिश $\vec{p}$ (मान लीजिए) है जिसका परिमाण $|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|$ है और जिसकी दिशा का l की दिशा के समान अथवा विपरीत होना इस बात पर निर्भर है कि $\cos\theta$ धनात्मक है अथवा ऋणात्मक। सदिश $\vec{p}$ को प्रक्षेप सदिश कहते हैं और इसका परिमाण $|\vec{p}|$, निर्दिष्ट रेखा l पर सदिश $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप कहलाता है। उदाहरणत: निम्नलिखित में से प्रत्येक आकृति में सदिश $\overrightarrow{AB}$ का रेखा l पर प्रक्षेप सदिश $\overrightarrow{AC}$ है। [आकृति 10.20 (i) से (iv) तक]



आकृति 10.20

प्रेक्षण

1. रेखा l के अनुदिश यदि $\hat{p}$ मात्रक सदिश है तो रेखा l पर सदिश $\vec{a}$ का प्रक्षेप $\vec{a}.\hat{p}$ से प्राप्त होता है।
2. एक सदिश $\vec{a}$ का दूसरे सदिश $\vec{b}$, पर प्रक्षेप $\vec{a}\cdot\hat{b}$, अथवा $\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, अथवा $\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ से प्राप्त होता है।
3. यदि $\theta = 0$, तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश स्वयं $\overrightarrow{AB}$ होगा और यदि $\theta = \pi$ तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश $\overrightarrow{BA}$ होगा।
4. यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ अथवा $\theta = \frac{3\pi}{2}$ तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश शून्य सदिश होगा।

टिप्पणी यदि α, β और γ सदिश $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ के दिक्-कोण हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन निम्नलिखित रूप में प्राप्त की जा सकती है।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \text{and} \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

यह भी ध्यान दीजिए कि $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ और $|\vec{a}|\cos\gamma$ क्रमशः OX, OY तथा OZ के अनुदिश $\vec{a}$ के प्रक्षेप हैं अर्थात् सदिश $\vec{a}$ के अदिश घटक a_1, a_2 और a_3 क्रमशः x, y, एवं z अक्ष के अनुदिश $\vec{a}$ के प्रक्षेप है। इसके अतिरिक्त यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तब इसको दिक्-कोसाइन की सहायता से

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 13 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः 1 और 2 है तथा $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, इन सदिशों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1$ और $|\vec{b}| = 2$. अतः

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

उदाहरण 14 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ निम्न द्वारा प्रदत्त है

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ से प्राप्त होता है।}$$

अब $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 1-1-1 = -1$

इसलिए, हम पाते हैं कि $\cos\theta = \dfrac{-1}{3}$

अत: अभीष्ट कोण $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ है।

उदाहरण 15 यदि $\vec{a} = 5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$, तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ लंबवत् है।

हल हम जानते हैं कि दो शून्येतर सदिश लंबवत् होते हैं यदि उनका अदिश गुणनफल शून्य है।

यहाँ $\vec{a}+\vec{b} = (5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}) = 6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$

और $\vec{a}-\vec{b} = (5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}) = 4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

इसलिए $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})\cdot(4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}) = 24-8-16 = 0$

अत: $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ लंबवत् सदिश हैं।

उदाहरण 16 सदिश $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ का, सदिश $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}(2\,.\,1+3\,.\,2+2\,.\,1) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ है।}$$

उदाहरण 17 यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ और $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$ तो $|\vec{a}-\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2\\ &= (2)^2-2(4)+(3)^2\end{aligned}$$

इसलिए $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

उदाहरण 18 यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है, इसलिए $|\vec{a}| = 1$. यह भी दिया हुआ है कि

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$$

अथवा $\vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

अथवा $|\vec{x}|^2-1 = 8$ अर्थात् $|\vec{x}|^2 = 9$

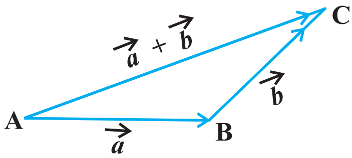
इसलिए $|\vec{x}| = 3$ (क्योंकि सदिश का परिमाण सदैव शून्येतर होता है)

उदाहरण 19 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$, के लिए सदैव $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz असमिका)।

हल दी हुई असमिका सहज रूप में स्पष्ट है यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$. वास्तव में इस स्थिति में हम पाते हैं कि $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=0=|\vec{a}||\vec{b}|$. इसलिए हम कल्पना करते हैं कि $|\vec{a}|\neq 0\neq|\vec{b}|$ तब हमें

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$ मिलता है।

इसलिए $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$



आकृति 10.21

उदाहरण 20 दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$ (त्रिभुज-असमिका)

हल दी हुई असमिका, दोनों स्थितियों $\vec{a}=0$ या $\vec{b}=0$ में सहज रूप से स्पष्ट है (क्यों ?)। इसलिए मान लीजिए कि $|\vec{a}|\neq\vec{0}\neq|\vec{b}|$ तब

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$ (अदिश गुणनफल क्रम विनिमय है)

$$\le |\vec{a}|^2+2|\vec{a}\cdot\vec{b}|+|\vec{b}|^2$$ (क्योंकि $x \le |x|\ \forall x \in \mathbf{R}$)

$$\le |\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$$ (उदाहरण 19 से)

$$= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

अतः $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

टिप्पणी यदि त्रिभुज-असमिका में समिका धारण होती है (उपर्युक्त उदाहरण 20 में) अर्थात्

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|,$$ तब

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$$

बिंदु A, B और C संरेख दर्शाता है।

उदाहरण 21 दर्शाइए कि बिंदु $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ और $C(7\hat{i}-\hat{k})$ संरेख है।

हल हम प्राप्त करते हैं:

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-5)\hat{k} = 3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ और } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

अतः बिंदु A, B और C संरेख हैं।

टिप्पणी उदाहरण 21 में ध्यान दीजिए कि $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ परंतु फिर भी बिंदु A, B और C त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण नहीं करते हैं।

प्रश्नावली 10.3

1. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2. सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

3. सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

4. सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का, सदिश $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

5. दर्शाइए कि दिए हुए निम्नलिखित तीन सदिशों में से प्रत्येक मात्रक सदिश है,

$$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\ \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}),\ \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

यह भी दर्शाइए कि ये सदिश परस्पर एक दूसरे के लंबवत् हैं।

6. यदि $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8$ और $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ हो तो $|\vec{a}|$ एवं $|\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

7. $(3\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान है और इन के बीच का कोण $60°$ है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

9. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, के लिए $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 12$ हो तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

11. दर्शाइए कि दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ पर लंब है।

12. यदि $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ और $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, तो सदिश $\vec{b}$ के बारे में क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

13. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ परंतु विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। एक उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

15. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) हैं तो $\angle$ABC ज्ञात कीजिए। [$\angle$ABC, सदिशों $\overrightarrow{BA}$ एवं $\overrightarrow{BC}$ के बीच का कोण है]

16. दर्शाइए कि बिंदु A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) और C(3, 10, –1) संरेख हैं।

17. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं।

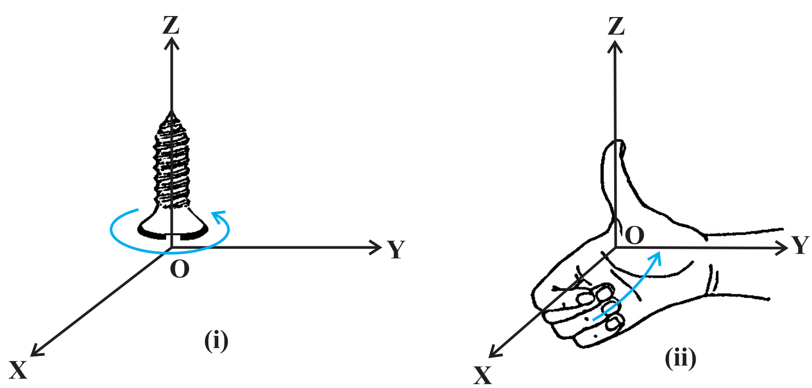
18. यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण '*a*' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

10.6.3 *दो सदिशों का सदिश गुणनफल [Vector (or cross) product of two vectors]*

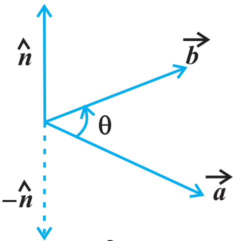
परिच्छेद 10.2 में हमने त्रि-विमीय दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति की चर्चा की थी। इस पद्धति में धनात्मक x-अक्ष को वामावर्त घुमाकर धनात्मक y-अक्ष पर लाया जाता है तो धनात्मक z-अक्ष की दिशा में एक दक्षिणावर्ती (प्रामाणिक) पेंच अग्रगत हो जाती है [आकृति 10.22(i)]।

एक दक्षिणावर्ती निर्देशांक पद्धति में जब दाएँ हाथ की उँगलियों को धनात्मक x-अक्ष की दिशा से दूर धनात्मक y-अक्ष की तरफ़ कुंतल किया जाता है तो अँगूठा धनात्मक z-अक्ष की ओर संकेत करता [आकृति 10.22 (ii)] है।



आकृति 10.22

परिभाषा 3 दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$, का सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b}$ से निर्दिष्ट किया जाता है और $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है और $0\le\theta\le\pi$ है। यहाँ $\hat{n}$ एक मात्रक सदिश है जो कि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$, दोनों पर लंब है। इस प्रकार $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं (आकृति 10.23) अर्थात् दक्षिणावर्ती पद्धति को $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ़ घुमाने पर यह $\hat{n}$ की दिशा में चलती है।

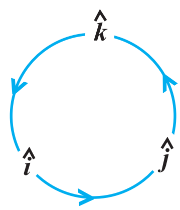


आकृति 10.23

यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$, तब θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में हम $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ परिभाषित करते हैं।

प्रेक्षण:

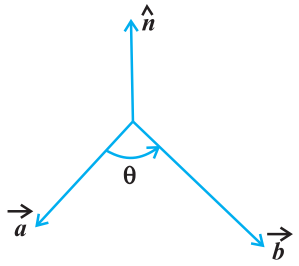
1. $\vec{a}\times\vec{b}$ एक सदिश है।
2. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं तब $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ यदि और केवल यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ एक दूसरे के समांतर (अथवा संरेख) हैं अर्थात्
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$
विशिष्टत: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ और $\vec{a}\times(-\vec{a})=\vec{0}$, क्योंकि प्रथम स्थिति में θ = 0 तथा द्वितीय स्थिति में θ = π, जिससे दोनों ही स्थितियों में sin θ का मान शून्य हो जाता है।
3. यदि $\theta=\frac{\pi}{2}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$।
4. प्रेक्षण 2 और 3 के संदर्भ में परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के लिए (आकृति 10.24), हम पाते हैं कि
$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

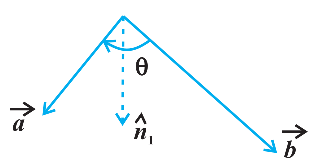


आकृति 10.24

5. सदिश गुणनफल की सहायता से दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है
$$\sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
6. यह सर्वदा सत्य है कि सदिश गुणनफल क्रम विनिमय नहीं होता है क्योंकि $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ वास्तव में $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, जहाँ $\vec{a},\vec{b}$ और $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते

हैं अर्थात् θ, $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ चक्रीय क्रम होता है। आकृति 10.25(i) जबकि $\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1$, जहाँ $\vec{b}$, $\vec{a}$ और $\hat{n}_1$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं अर्थात् $\theta, \vec{b}$ से $\vec{a}$ की ओर चक्रीय क्रम होता है आकृति 10.25(ii)।





आकृति 10.25

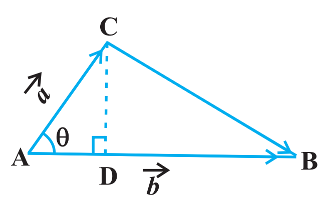
अतः यदि हम यह मान लेते हैं कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों एक ही कागज़ के तल में हैं तो $\hat{n}$ और $\hat{n}_1$ दोनों कागज़ के तल पर लंब होंगे परंतु $\hat{n}$ कागज़ से ऊपर की तरफ़ दिष्ट होगा और $\hat{n}_1$ कागज़ से नीचे की तरफ़ दिष्ट होगा अर्थात् $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

इस प्रकार $$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$$

7. प्रेक्षण 4 और 6 के संदर्भ में

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \text{ और } \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \text{ है।}$$

8. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ त्रिभुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ के रूप में प्राप्त होता है।



आकृति 10.26

त्रिभुज के क्षेत्रफल की परिभाषा के अनुसार हम आकृति 10.26 से पाते हैं कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}AB\cdot CD$.

परंतु $AB = |\vec{b}|$ (दिया हुआ है) और $CD = |\vec{a}|\sin\theta$

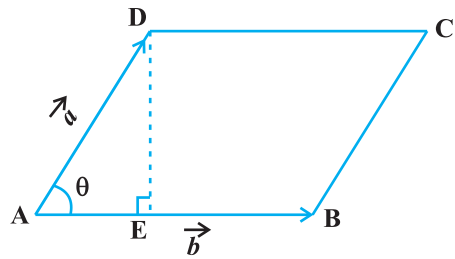
अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ के रूप में प्राप्त होता है।

आकृति 10.27 से हम पाते हैं कि समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = AB . DE.

परंतु $AB = |\vec{b}|$ (दिया हुआ है), और $DE = |\vec{a}| \sin\theta$ अत:

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $|\vec{b}||\vec{a}| \sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$



आकृति 10.27

अब हम सदिश गुणनफल के दो महत्वपूर्ण गुणों को अभिव्यक्त करेंगे।

गुणधर्म सदिश गुणनफल का योगफल पर वितरण नियम (Distributivity of vector product over addition) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश हैं और λ एक अदिश है तो

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

मान लीजिए दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में क्रमश: $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ दिए हुए हैं तब उनका सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ द्वारा दिया जा सकता है।

व्याख्या हम पाते हैं

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\
&= a_1b_1(\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i}) \\
&\quad + a_2b_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) \\
&\quad + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_3b_3(\hat{k} \times \hat{k}) \qquad \text{(गुणधर्म 1 से)} \\
&= a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) - a_1b_3(\hat{k} \times \hat{i}) - a_2b_1(\hat{i} \times \hat{j}) \\
&\quad + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) - a_3b_2(\hat{j} \times \hat{k})
\end{aligned}$$

(क्योंकि $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ और $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ और $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k}-a_1b_3\hat{j}-a_2b_1\hat{k}+a_2b_3\hat{i}+a_3b_1\hat{j}-a_3b_2\hat{i}$$

(क्योंकि $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ और $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$)

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

उदाहरण 22 यदि $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$, तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15)-(-4-9)\hat{j}+(10-3)\hat{k} = -17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

अतः $$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2}=\sqrt{507}$$

उदाहरण 23 सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हैं।

हल हम पाते हैं कि $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

एक सदिश, जो $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ दोनो पर लंब है, निम्नलिखित द्वारा प्रदत्त है

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix} = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}\quad (=\vec{c}, \text{ मान लीजिए})$$

अब $$|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k} \text{ है।}$$

टिप्पणी किसी तल पर दो लंबवत् दिशाएँ होती हैं। अतः $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ पर दूसरा लंबवत् मात्रक सदिश $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ होगा। परंतु यह $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ का एक परिणाम है।

उदाहरण 24 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिंदु A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C(2, 3, 1) हैं।

हल हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ और $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$. दिए हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ है।

अब $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ है।

उदाहरण 25 उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गई हैं।

हल किसी समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

इसलिए $$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

इस प्रकार आवश्यक क्षेत्रफल $\sqrt{42}$ है।

प्रश्नावली 10.4

1. यदि $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

2. सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ की लंब दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ है।

3. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, $\hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यून कोण θ बनाता है तो θ का मान ज्ञात कीजिए और इसकी सहायता से $\vec{a}$ के घटक भी ज्ञात कीजिए।

4. दर्शाइए कि $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b})$

5. λ और μ ज्ञात कीजिए, यदि $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=\vec{0}$

6. दिया हुआ है कि $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ और $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

7. मान लीजिए सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ क्रमशः $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},\ c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ के रूप में दिए हुए हैं तब दर्शाइए कि $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

8. यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ होता है। क्या विलोम सत्य है? उदाहरण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

9. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) और C(1, 5, 5) हैं।

10. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा निर्धारित हैं।

11. मान लीजिए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=3$ और $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$, तब $\vec{a}\times\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है:

    (A) π/6 (B) π/4 (C) π/3 (D) π/2

12. एक आयत के शीर्षों A, B, C और D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः

    $-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ \hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ \hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ और $-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, हैं का क्षेत्रफल है:

    (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

    (C) 2 (D) 4

विविध उदाहरण

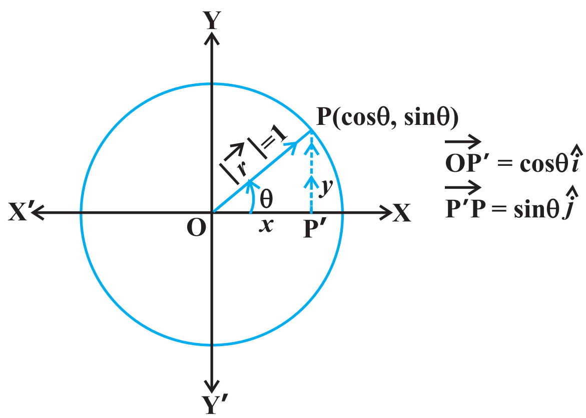
उदाहरण 26 XY-तल में सभी मात्रक सदिश लिखिए।

हल मान लीजिए कि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, XY-तल में एक मात्रक सदिश है (आकृति 10.28)। तब आकृति के अनुसार हम पाते हैं कि $x = \cos\theta$ और $y = \sin\theta$ (क्योंकि $|\vec{r}| = 1$). इसलिए हम सदिश $\vec{r}$ को,

$$\vec{r}\,(=\overrightarrow{OP}) = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \quad \dots (1)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

स्पष्टत: $$|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$



आकृति 10.28

जैसे-जैसे θ, 0 से 2π, तक परिवर्तित होता है बिंदु P (आकृति 10.28) वामावर्त दिशा में वृत $x^2 + y^2 = 1$ का अनुरेखण करता है और इसमें सभी संभावित दिशाएँ सम्मिलित हैं। अत: (1) से XY-तल में प्रत्येक मात्रक सदिश प्राप्त होता है।

उदाहरण 27 यदि बिंदुओं A, B, C और D, के स्थिति सदिश क्रमश: $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ है, तो सरल रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। निगमन कीजिए कि AB और CD संरेख हैं।

हल नोट कीजिए कि यदि θ, AB और CD, के बीच का कोण है तो θ, $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ के बीच का भी कोण है।

अब $$\overrightarrow{AB} = \text{B का स्थिति सदिश} - \text{A का स्थिति सदिश}$$
$$= (2\hat{i} + 5\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

इसी प्रकार $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ और $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

अत: $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

क्योंकि $0 \le \theta \le \pi$, इससे प्राप्त होता है कि $\theta = \pi$. यह दर्शाता है कि AB तथा CD एक दूसरे के संरेख हैं।

विकल्पत: $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, इससे कह सकते कि $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ संरेख सदिश हैं।

उदाहरण 28 मान लीजिए $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लंबवत् हैं तो, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

अब $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$

$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

इसलिए $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

उदाहरण 29 तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ और $|\vec{c}| = 2$ तो राशि $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, इसलिए हम पाते हैं कि

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

अथवा $$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

इसलिए $$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -9 \qquad \dots (1)$$

पुन: $$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

अथवा $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -|\vec{b}|^2 = -16$ ... (2)

इसी प्रकार $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4$ ... (3)

(1), (2) और (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -29$$

या $2\mu = -29$, i.e., $\mu = \frac{-29}{2}$

उदाहरण 30 यदि परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}, \hat{j}$ और $\hat{k}$, की दक्षिणावर्ती पद्धति के सापेक्ष $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, तो $\vec{\beta}$ को $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ के रूप में अभिव्यक्त कीजिए जहाँ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ के समांतर है और $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ के लंबवत् है।

हल मान लीजिए कि $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, λ एक अदिश है अर्थात् $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i} - \lambda\hat{j}$

अब $\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i} + (1+\lambda)\hat{j} - 3\hat{k}$

क्योंकि $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ पर लंब है इसलिए $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$

अर्थात् $3(2-3\lambda) - (1+\lambda) = 0$

अथवा $\lambda = \frac{1}{2}$

इसलिए $\vec{\beta}_1 = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$ और $\vec{\beta}_2 = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - 3\hat{k}$

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. XY-तल में, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाने वाला मात्रक सदिश लिखिए।
2. बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले सदिश के अदिश घटक और परिमाण ज्ञात कीजिए।
3. एक लड़की पश्चिम दिशा में 4 km चलती है। उसके पश्चात् वह उत्तर से 30° पश्चिम की दिशा में 3 km चलती है और रूक जाती है। प्रस्थान के प्रारंभिक बिंदु से लड़की का विस्थापन ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, तब क्या यह सत्य है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
5. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ एक मात्रक सदिश है।
6. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी के समांतर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

7. यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, तो सदिश $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ के समांतर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि बिंदु $A(1,-2,-8)$, $B(5,0,-2)$ और $C(11,3,7)$ संरेख है और B द्वारा AC को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

9. दो बिंदुओं $P(2\vec{a}+\vec{b})$ और $Q(\vec{a}-3\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा को $1:2$ के अनुपात मे बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि बिंदु P रेखाखंड RQ का मध्य बिंदु है।

10. एक समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ हैं। इसके विकर्ण के समांतर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

11. दर्शाइए कि OX, OY एवं OZ अक्षों के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक्-कोसाइन कोज्याएँ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ है।

12. मान लीजिए $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. एक ऐसा सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लंब है और $\vec{c}\cdot\vec{d}=15$

13. सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का, सदिशों $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश के साथ अदिश गुणनफल 1 के बराबर है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ समान परिमाणों वाले परस्पर लंबवत् सदिश हैं तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\ \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

15. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$, यदि और केवल यदि $\vec{a},\vec{b}$ लंबवत् हैं। यह दिया हुआ है कि $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

16. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ होगा यदि:

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (B) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

(C) $0<\theta<\pi$ (D) $0\leq\theta\leq\pi$

17. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है तो $\vec{a}+\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि:

(A) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (B) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (C) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ जब θ बराबर है:

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

सारांश

- एक बिंदु P(*x*, *y*, *z*) की स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}(=\vec{r})=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ है और परिमाण $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ है।
- एक सदिश के अदिश घटक इसके दिक्–अनुपात कहलाते हैं और क्रमागत अक्षों के साथ इसके प्रक्षेप को निरूपित करते हैं।
- एक सदिश का परिमाण (*r*), दिक्–अनुपात *a*, *b*, *c* और दिक्–कोसाइन (*l*, *m*, *n*) निम्नलिखित रूप में संबंधित हैं:

$$l=\frac{a}{r},\quad m=\frac{b}{r},\quad n=\frac{c}{r}$$

- त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग $\vec{0}$ है।
- दो सह–आदिम सदिशों का योग एक ऐसे समांतर चतुर्भुज के विकर्ण से प्राप्त होता है जिसकी संलग्न भुजाएँ दिए हुए सदिश हैं।
- एक सदिश का अदिश λ से गुणन इसके परिमाण को |λ| के गुणज में परिवर्तित कर देता है और λ का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार इसकी दिशा को समान अथवा विपरीत रखता है।
- दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के लिए सदिश $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश है।
- बिदुओं P और Q जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाली रेखा को $m:n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश (i) $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ अंतः विभाजन पर (ii) $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ बाह्य विभाजन पर, के रूप में प्राप्त होता है।

- दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो उनका अदिश गुणनफल $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ के रूप में प्राप्त होता है। यदि $\vec{a}\cdot\vec{b}$ दिया हुआ है तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण 'θ', $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ से प्राप्त होता है।
- यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो उनका सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ के रूप में प्राप्त होता है। जहाँ $\hat{n}$ एक ऐसा मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को सम्मिलित करने वाले तल के लंबवत् है तथा $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\hat{n}$ दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति को निर्मित करते हैं।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ और λ एक अदिश है तो

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

और $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

सदिश शब्द का व्युत्पन्न लैटिन भाषा के एक शब्द वेक्टस (vectus) से हुआ है जिसका अर्थ है हस्तगत करना। आधुनिक सदिश सिद्धांत के भ्रूणीय विचार की तिथि सन् 1800 के आसपास मानी जाती है, जब Caspar Wessel (1745–1818 ई.) और Jean Robert Argand (1768-1822ई.) ने इस बात का वर्णन किया कि एक निर्देशांक तल में किसी दिष्ट रेखाखंड की सहायता से एक सम्मिश्र संख्या $a + ib$ का ज्यामितीय अर्थ निर्वचन कैसे किया जा सकता है। एक आयरिश गणितज्ञ, William Rowen Hamilton (1805-1865 ई.) ने अपनी पुस्तक, "*Lectures on Quaternions*" (1853 ई.) में दिष्ट रेखाखंड के लिए सदिश शब्द का प्रयोग सबसे पहले किया था। चतुष्टयीयों (quaternians) [कुछ निश्चित बीजीय नियमों का पालन करते हुए $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ के रूप वाले चार वास्तविक संख्याओं का

समुच्चय] की हैमिल्टन विधि सदिशों को त्रि–विमीय अंतरिक्ष में गुणा करने की समस्या का एक हल था। तथापि हम यहाँ इस बात का जिक्र अवश्य करेंगे कि सदिश की संकल्पना और उनके योगफल का विचार बहुत– दिनों पहले से Plato (384-322 ईसा पूर्व) के एक शिष्य एवं यूनानी दार्शानिक और वैज्ञानिक Aristotle (427-348 ईसा पूर्व) के काल से ही था। उस समय इस जानकारी की कल्पना थी कि दो अथवा अधिक बलों की संयुक्त क्रिया उनको समांतर चतुर्भुज के नियमानुसार योग करने पर प्राप्त की जा सकती है। बलों के संयोजन का सही नियम, कि बलों का योग सदिश रूप में किया जा सकता है, की खोज Sterin Simon(1548-1620ई.) द्वारा लंबवत् बलों की स्थिति में की गई। सन् 1586 में उन्होंने अपनी शोधपुस्तक, "*DeBeghinselen der Weeghconst*" (वजन करने की कला के सिद्धांत) में बलों के योगफल के ज्यामितीय सिद्धांत का विश्लेषण किया था जिसके कारण यांत्रिकी के विकास में एक मुख्य परिवर्तन हुआ। परंतु इसके बाद भी सदिशों की व्यापक संकल्पना के निर्माण में 200 वर्ष लग गए।

सन् 1880 में एक अमेरिकी भौतिक शास्त्री एवं गणितज्ञ Josaih Willard Gibbs (1839-1903 ई.) और एक अंग्रेज अभियंता Oliver Heaviside (1850-1925 ई.) ने एक चतुष्टयी के वास्तविक (अदिश) भाग को काल्पनिक (सदिश) भाग से पृथक् करते हुए सदिश विश्लेषण का सृजन किया था। सन् 1881 और 1884 में Gibbs ने "*Entitled Element of Vector Analysis*" नामक एक शोध पुस्तिका छपवाई। इस पुस्तक में सदिशों का एक क्रमबद्ध एवं संक्षिप्त विवरण दिया हुआ था। तथापि सदिशों के अनुप्रयोग का निरूपण करने की कीर्ति D. Heaviside और P.G. Tait (1831-1901 ई.) को प्राप्त है जिन्होंने इस विषय के लिए सार्थक योगदान दिया है।

12082CH11

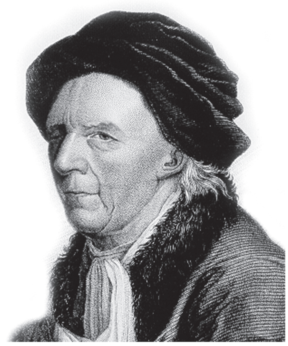
अध्याय 11

त्रि-विमीय ज्यामिति (Three Dimensional Geometry)

❖*The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में, वैश्लेषिक ज्यामिति का अध्ययन करते समय द्वि-विमीय और त्रि-विमीय विषयों के परिचय में हमने स्वयं को केवल कार्तीय विधि तक सीमित रखा है। इस पुस्तक के पिछले अध्याय में हमने सदिशों की मूल संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। अब हम सदिशों के बीजगणित का त्रि-विमीय ज्यामिति में उपयोग करेंगे। त्रि-विमीय ज्यामिति में इस उपागम का उद्देश्य है कि यह इसके अध्ययन को अत्यंत सरल एवं सुरुचिपूर्ण (सुग्राहय) बना देता है।*



Leonhard Euler
(1707-1783)

इस अध्याय में हम दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोज्या व दिक्-अनुपात का अध्ययन करेंगे और विभिन्न स्थितियों में अंतरिक्ष में रेखाओं और तलों के समीकरणों, दो रेखाओं, दो तलों व एक रेखा और एक तल के बीच का कोण, दो विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी व एक तल की एक बिंदु से दूरी के विषय में भी विचार विमर्श करेंगे। उपरोक्त परिणामों में से अधिकांश परिणामों को सदिशों के रूप में प्राप्त करते हैं। तथापि हम इनका कार्तीय रूप में भी अनुवाद करेंगे जो कालांतर में स्थिति का स्पष्ट ज्यामितीय और विश्लेषणात्मक चित्रण प्रस्तुत कर सकेगा।

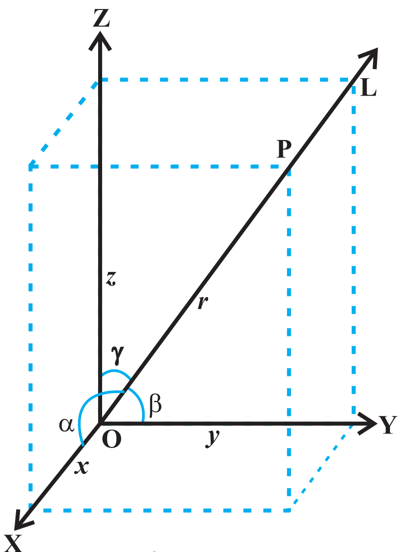
11.2 रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

अध्याय 10 में, स्मरण कीजिए, कि मूल बिंदु से गुजरने वाली सदिश रेखा L द्वारा x, y और z-अक्षों के साथ क्रमश α, β और γ बनाए गए कोण दिक्-कोण कहलाते हैं तब इन कोणों की कोसाइन नामत: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ रेखा L के दिक्-कोसाइन (direction cosines or dc's) कहलाती हैं।

---

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book *"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools"*, NCERT, 2005

यदि हम L की दिशा विपरीत कर देते हैं तो दिक्-कोण, अपने संपूरकों में अर्थात् π-α, π-β और π-γ से बदल जाते हैं। इस प्रकार, दिक्-कोसाइन के चिह्न बदल जाते हैं।



आकृति 11.1

ध्यान दीजिए, अंतरिक्ष में दी गई रेखा को दो विपरीत दिशाओं में बढ़ा सकते हैं और इसलिए इसके दिक्-कोसाइन के दो समूह हैं। इसलिए अंतरिक्ष में ज्ञात रेखा के लिए दिक्-कोसाइन के अद्वितीय समूह के लिए, हमें ज्ञात रेखा को एक सदिश रेखा लेना चाहिए। इन अद्वितीय दिक्-कोसाइन को l, m और n के द्वारा निर्दिष्ट किए जाते हैं।

टिप्पणी अंतरिक्ष में दी गई रेखा यदि मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो इसकी दिक्-कोसाइन को ज्ञात करने के लिए, हम मूल बिंदु से दी गई रेखा के समांतर एक रेखा खींचते हैं। अब मूल बिंदु से इनमें से एक सदिश रेखा के दिक्-अनुपात ज्ञात करते हैं क्योंकि दो समांतर रेखाओं के दिक्-अनुपातों के समूह समान (वही) होते हैं।

एक रेखा के दिक्-कोसाइन के समानुपाती संख्याओं को रेखा के दिक्-अनुपात (direction ratios or *dr's*) कहते हैं। यदि एक रेखा के दिक्-कोसाइन l, m, n व दिक्-अनुपात a, b, c हों तब किसी शून्येतर $\lambda \in \mathbf{R}$ के लिए $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ और $c = \lambda n$

टिप्पणी कुछ लेखक दिक्-अनुपातों को दिक्-संख्याएँ भी कहते हैं।

मान लीजिए एक रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c और रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n है। तब

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (मान लीजिए), } k \text{ एक अचर है।}$$

इसलिए $$l = ak,\ m = bk,\ n = ck \qquad \dots (1)$$

परंतु $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

इसलिए $$k^2\ (a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

या $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

अत: (1) से, रेखा की दिक्-कोसाइन (*d.c.'s*)

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

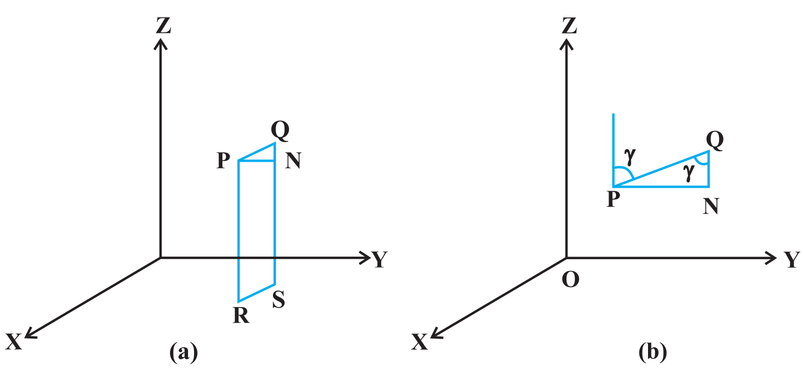
किसी रेखा के लिए यदि रेखा के दिक्-अनुपात क्रमश: a, b, c है, तो $ka, kb, kc; k \neq 0$ भी दिक्-अनुपातों का एक समूह है। इसलिए एक रेखा के दिक्-अनुपातों के दो समूह भी समानुपाती होंगे। अत: किसी एक रेखा के दिक्-अनुपातों के असंख्य समूह होते हैं।

11.2.1 दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन (Direction cosines of a line passing through two points)

क्योंकि दो दिए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा अद्वितीय होती है। इसलिए दो दिए गए बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ से गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं (आकृति 11.3 (a))।

मान लीजिए कि रेखा PQ की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं और यह x, y और z-अक्ष के साथ कोण क्रमश: α, β, γ बनाती हैं।

मान लीजिए P और Q से लंब खींचिए जो XY-तल को R तथा S पर मिलते हैं। P से एक अन्य लंब खींचिए जो QS को N पर मिलता है। अब समकोण त्रिभुज PNQ में, $\angle PQN = \gamma$ (आकृति 11.2 (b)) इसलिए



आकृति 11.2

$$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

इसी प्रकार $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{PQ}$ और $\cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}$

अतः बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ कि दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ हैं।}$$

जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

टिप्पणी बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड के दिक्-अनुपात निम्न प्रकार से लिए जा सकते हैं।

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, \text{ या } x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$$

उदाहरण 1 यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 90°, 60° तथा 30° का कोण बनाती है तो दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n है। तब $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$,

$n = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 2 यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात 2, –1, –2 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल दिक्-कोसाइन निम्नवत् हैं

$$\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

अर्थात् $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

उदाहरण 3 दो बिंदुओं (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

हैं, जहाँ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

यहाँ P और Q क्रमशः (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) हैं।

इसलिए $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

इसलिए दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन हैं:

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

उदाहरण 4 x, y और z-अक्षों की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल x-अक्ष क्रमशः x, y और z-अक्ष के साथ 0°, 90° और 90° के कोण बनाता है। इसलिए x-अक्ष की दिक्-कोसाइन cos 0°, cos 90°, cos 90° अर्थात् 1,0,0 हैं।
इसी प्रकार y-अक्ष और z-अक्ष की दिक्-कोसाइन क्रमशः 0, 1, 0 और 0, 0, 1 हैं।

उदाहरण 5 दर्शाइए कि बिंदु A (2, 3, – 4), B (1, – 2, 3) और C (3, 8, – 11) संरेख हैं।

हल A और B को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात
1 –2, –2 –3, 3 + 4 अर्थात् – 1, – 5, 7 हैं।

B और C को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 –1, 8 + 2, – 11 – 3, अर्थात्, 2, 10, – 14 हैं।

स्पष्ट है कि AB और BC के दिक्-अनुपात समानुपाती हैं। अतः AB और BC समांतर हैं। परंतु AB और BC दोनों में B उभयनिष्ठ है। अतः A, B, और C संरेख बिंदु हैं।

प्रश्नावली 11.1

1. यदि एक रेखा x, y और z-अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।
2. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।
3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात –18, 12, – 4, हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या हैं?
4. दर्शाइए कि बिंदु (2, 3, 4), (– 1, – 2, 1), (5, 8, 7) संरेख हैं।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिंदु (3, 5, – 4), (– 1, 1, 2) और (– 5, – 5, – 2) हैं।

11.3 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण (Equation of a Line in Space)

कक्षा XI में द्वि-विमीय तल में रेखाओं का अध्ययन करने के पश्चात् अब हम अंतरिक्ष में एक रेखा के सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात करेंगे।

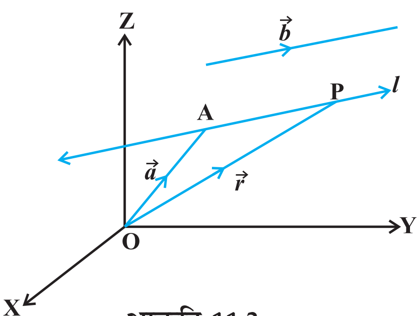
एक रेखा अद्वितीयत: निर्धारित होती है, यदि

(i) यह दिए बिंदु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या

(ii) यह दो दिए गए बिंदुओं से होकर जाती है।

11.3.1 *दिए गए बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का समीकरण (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

समकोणिक निर्देशांक्ष निकाय के मूल बिंदु O के सापेक्ष मान लीजिए कि बिंदु A का सदिश $\vec{a}$ है। मान लीजिए कि बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा l है। मान लीजिए कि l पर स्थित किसी स्वेच्छ बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है (आकृति 11.3)।



आकृति 11.3

तब $\overrightarrow{AP}$ सदिश $\vec{b}$ के समांतर है अर्थात् $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$, जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

परंतु $$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

अर्थात् $$\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$$

विलोमत: प्राचल λ के प्रत्येक मान के लिए यह समीकरण रेखा के किसी बिंदु P की स्थिति प्रदान करता है। अत: रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \qquad \dots (1)$$

टिप्पणी यदि $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ है तो रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c है और विलोमत: यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c हों तो $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ रेखा के समांतर होगा। यहाँ b को $|\vec{b}|$ न समझा जाए।

सदिश रूप से कार्तीय रूप व्युत्पन्न करना (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)

मान लीजिए कि दिए बिंदु A के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) हैं और रेखा की दिक्-कोसाइन a, b, c हैं मान लीजिए किसी बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। तब

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

और $$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करके $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$x = x_1 + \lambda a;\ \ y = y_1 + \lambda b;\ \ z = z_1 + \lambda c \qquad \dots (2)$$

ये रेखा के प्राचल समीकरण हैं। (2) से प्राचल λ का विलोपन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \dots (3)$$

यह रेखा का कार्तीय समीकरण है।

टिप्पणी यदि रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ हैं।}$$

उदाहरण 6 बिंदु (5, 2, – 4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है, कि

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

इसलिए, रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \quad [(1) \text{ से}]$$

चूँकि रेखा पर स्थित किसी बिंदु P(x, y, z) की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, इसलिए

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

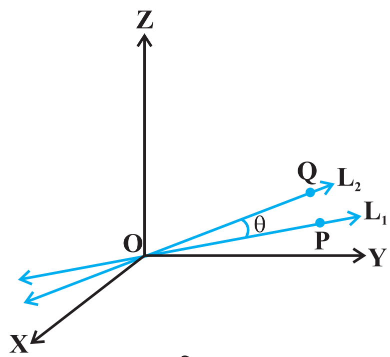
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

जो रेखा के समीकरण का कार्तीय रूप है।

11.4 दो रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two lines)

मान लीजिए कि L_1 और L_2 मूल बिंदु से गुजरने वाली दो रेखाएँ हैं जिनके दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2, है। पुनः मान लीजिएकि L_1 पर एक बिंदु P तथा L_2 पर एक बिंदु Q है। आकृति 11.4 में दिए गए सदिश OP और OQ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि OP और OQ के बीच न्यून कोण θ है। अब स्मरण कीजिए कि सदिशों OP और OQ के घटक क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं। इसलिए उनके बीच का कोण θ

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right|$$ द्वारा प्रदत्त है।



आकृति 11.4

पुनः $\sin\theta$ के रूप में, रेखाओं के बीच का कोण

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ से प्रदत्त है

$$= \sqrt{1 - \frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)^2 + (b_1\,c_2 - b_2\,c_1)^2 + (c_1\,a_2 - c_2\,a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \ldots (2)$$

टिप्पणी उस स्थिति में जब रेखाएँ L_1 और L_2 मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो हम L_1 और L_2 के समांतर, मूल बिंदु से गुजरने वाली रेखाएँ क्रमशः L'_1 व L'_2 लेते हैं। यदि रेखाओं L_1 और L_2 के दिक्-अनुपातों के बजाय दिक्-कोसाइन दी गई हो जैसे L_1 के लिए l_1, m_1, n_1 और L_2 के लिए l_2, m_2, n_2 तो (1) और (2) निम्नलिखित प्रारूप लेंगे।

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (क्योंकि } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \qquad \ldots (3)$$

और $$\sin\theta = \sqrt{(l_1\,m_2 - l_2\,m_1)^2 - (m_1\,n_2 - m_2\,n_1)^2 + (n_1\,l_2 - n_2\,l_1)^2} \qquad \ldots (4)$$

दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 वाली रेखाएँ

(i) लंबवत् है, यदि $\theta = 90°$, अर्थात् (1) से $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) समांतर है, यदि $\theta = 0$, अर्थात् (2) से $\boldsymbol{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}}$

अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करेंगे जिनके समीकरण दिए गए हैं। यदि उन रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ के बीच न्यून कोण θ है

तब $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

कार्तीय रूप में यदि रेखाओं: $$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \ldots (1)$$

और $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \quad \ldots (2)$$

के बीच का कोण θ है जहाँ रेखाएँ (1) व (2) के दिक्-अनुपात क्रमश: a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

उदाहरण 7 दिए गए रेखा-युग्म

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

और $$\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3 \times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अत: $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

उदाहरण 8 रेखा-युग्म:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

और $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

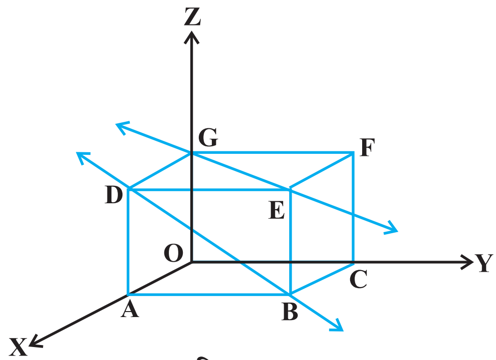
हल पहली रेखा के दिक्-अनुपात 3, 5, 4 और दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात 1, 1, 2 हैं। यदि उनके बीच का कोण θ हो तब

$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

अत: अभीष्ट कोण $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ है।

11.5 दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Shortest Distance between two lines)

अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी शून्य है। और अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ समांतर है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी, उनके बीच लंबवत् दूरी होगी अर्थात् एक रेखा के एक बिंदु से दूसरी रेखा पर खींचा गया लंब।



आकृति 11.5

इसके अतिरिक्त अंतरिक्ष में, ऐसी भी रेखाएँ होती है जो न तो प्रतिच्छेदी और न ही समांतर होती है। वास्तव में ऐसी रेखाओं के युग्म असमतलीय होते हैं और इन्हें विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) कहते हैं। उदाहरणतया हम आकृति 11.5 में x, y और z-अक्ष के अनुदिश क्रमश: 1, 3, 2 इकाई के आकार वाले कमरे पर विचार करते हैं।

रेखा GE छत के विकर्ण के अनुदिश है और रेखा DB, A के ठीक ऊपर छत के कोने से गुजरती हुई दीवार के विकर्ण के अनुदिश है। ये रेखाएँ विषमतलीय हैं क्योंकि वे समांतर नहीं है और कभी मिलती भी नहीं हैं।

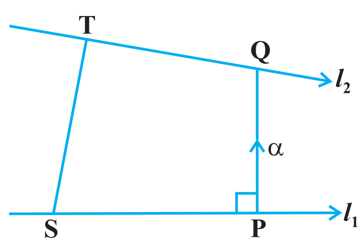
दो रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी से हमारा अभिप्राय एक ऐसे रेखाखंड से है जो एक रेखा पर स्थित एक बिंदु को दूसरी रेखा पर स्थित अन्य बिंदु को मिलाने से प्राप्त हों ताकि इसकी लंबाई न्यूनतम हो। न्यूनतम दूरी रेखाखंड दोनों विषमतलीय रेखाओं पर लंब होगा।

11.5.1 *दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी (Distance between two skew lines)*

अब हम रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित विधि से ज्ञात करते हैं। मान लीजिए l_1 और l_2 दो विषमतलीय रेखाएँ है जिनके समीकरण (आकृति 11.6) निम्नलिखित हैं:

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\, \vec{b}_1 \qquad \text{... (1)}$$

और $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\, \vec{b}_2 \qquad \text{... (2)}$$



आकृति 11.6

रेखा l_1 पर कोई बिंदु S जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर कोई बिंदु T जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है, लीजिए। तब न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण, ST का न्यूनतम दूरी की दिशा में प्रक्षेप की माप के समान होगा (अनुच्छेद 10.6.2)।

यदि l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश $\overrightarrow{PQ}$ है तो यह दोनों $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ पर लंब होगी। $\overrightarrow{PQ}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n}$ इस प्रकार होगी कि

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \ldots (3)$$

तब $$\overrightarrow{PQ} = d$$

जहाँ d, न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण है। मान लीजिए $\overrightarrow{ST}$ और $\overrightarrow{PQ}$ के बीच का कोण θ है, तब

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

परंतु $$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\,ST}\right| \quad (\text{क्योंकि } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad ((3) \text{ के द्वारा})$$

इसलिए अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

या $$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ है।}$$

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

रेखाओं:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

और $\qquad l_2 : \dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$

के बीच की न्यूनतम दूरी है:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

11.5.2 *समांतर रेखाओं के बीच की दूरी (Distance between parallel lines)*

यदि दो रेखाएँ l_1 यदि l_2 समांतर हैं तो वे समतलीय होती हैं। माना दी गई रेखाएँ क्रमशः

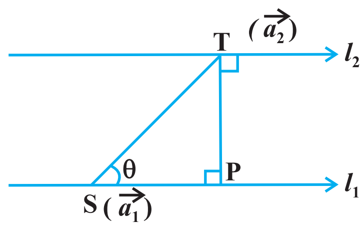
$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \qquad \dots (1)$$

और

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b} \qquad \dots (2)$$

हैं, जहाँ l_1 पर बिंदु S का स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर बिंदु T का स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है (आकृति 11.7)

क्योंकि l_1, और l_2 समतलीय है। यदि बिंदु T से l_1 पर डाले गए लंब का पाद P है तब रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की दूरी = |TP|



आकृति 11.7

मान लीजिए कि सदिशों $\overrightarrow{ST}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है। तब,

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \dots (3)$$

जहाँ रेखाओं l_1 और l_2 के तल पर लंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है।

परंतु $\qquad \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

इसलिए (3) से हम पाते हैं कि

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\mathrm{PT}\,\hat{n} \qquad (\text{क्योंकि PT = ST sin } \theta)$$

अर्थात् $\qquad |\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\mathrm{PT} \cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$

इसलिए ज्ञात रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = |\overrightarrow{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ है।}$$

उदाहरण 9 रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \ldots (1)$$

और
$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \ldots (2)$$

हल समीकरण (1) व (2) की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\,\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\,\vec{b}_2$, से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसलिए
$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

और
$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

इस प्रकार
$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

इसलिए दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

उदाहरण 10 निम्नलिखित दी गई रेखाओं l_1 और l_2:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दोनों रेखाएँ समातंर हैं। (क्यों?) हमें प्राप्त है कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

इसलिए रेखाओं के बीच की दूरी

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 11.2

1. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लंबवत् हैं।

2. दर्शाइए कि बिंदुओं $(1, -1, 2), (3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा बिंदुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है।

3. दर्शाइए कि बिंदुओं $(4, 7, 8), (2, 3, 4)$ से होकर जाने वाली रेखा, बिंदुओं $(-1, -2, 1)$, $(1, 2, 5)$ से जाने वाली रेखा के समांतर है।

4. बिंदु $(1, 2, 3)$ से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समांतर है।

5. बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i} - j + 4\hat{k}$ से गुज़रने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है।

7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $r = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ और

$r = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $r = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ और

$r = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

9. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

10. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लंब हों।

11. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लंब हैं।

12. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

13. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

14. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

15. रेखाएँ, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम ज्ञात कीजिए:

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं।

2. x-अक्ष के समांतर तथा मूल-बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लंब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

4. रेखाओं $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और

$\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

5. बिंदु (1, 2, – 4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

सारांश

- **एक रेखा की दिक्-कोसाइन** रेखा द्वारा निर्देशांक्षों की धन दिशा के साथ बनाए कोणों की कोसाइन होती है।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- दो बिंदुओं $P (x_1, y_1, z_1)$ और $Q (x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

  $\dfrac{x_2 - x_1}{PQ}, \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}, \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$ हैं

  जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- **एक रेखा का दिक्-अनुपात** वे संख्याएँ हैं जो रेखा की दिक्-कोसाइन के समानुपाती होती हैं।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n और दिक्-अनुपात a, b, c हैं तो

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **विषमतलीय रेखाएँ** अंतरिक्ष की वे रेखाएँ जो न तो समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी हैं। यह रेखाएँ विभिन्न तलों में होती हैं।
- **विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण** वह कोण है जो एक किसी बिंदु (वरीयता मूल बिंदु की) से विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक के समांतर खींची गई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच में है।
- यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ है तब

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

- यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिक्-अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

- एक ज्ञात बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से गुज़रने वाली और सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ है।

- बिंदु (x_1, y_1, z_1) से जाने वाली रेखा जिसकी दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, का समीकरण $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ है।
- दो बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है से जाने वाली रेखा के समीकरण का सदिश समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$ है।
- यदि दो रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\lambda\vec{b}_2$, के बीच का न्यूनकोण θ है तो
$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$$
- यदि दो रेखाओं $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ और $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ के बीच का कोण θ है तब $\cos\theta=|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|$.
- दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखंड है जो दोनों रेखाओं पर लंब हैं।
- दो रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ के बीच न्यूनतम दूरी
$$\left|\frac{(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|$$ है।
- दो रेखाओं $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ और $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी
$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$ है।
- दो समांतर रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}$ के बीच की दूरी
$$\left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$ है।

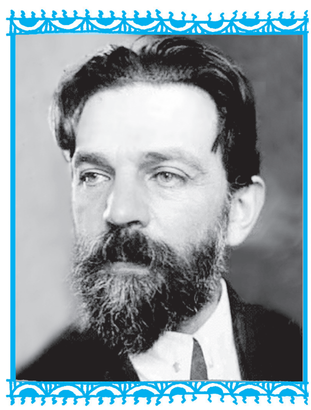
अध्याय 12

12082CH12

रैखिक प्रोग्रामन Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

12.1 भूमिका (Introduction)


L. Kantorovich

पिछली कक्षाओं में हम रैखिक समीकरणों और दिन प्रति दिन की समस्याओं में उनके अनुप्रयोग पर विचार-विमर्श कर चुके हैं। कक्षा XI में हमने दो चर राशियों वाले रैखिक असमिकाओं और रैखिक असमिकाओं के निकायों के आलेखीय निरूपण से हल निकालने के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। गणित में कई अनुप्रयोगों में असमिकाओं/समीकरणों के निकाय सम्मिलित हैं। इस अध्याय में हम रैखिक असमिकाओं/समीकरणों के निकायों का नीचे दी गई कुछ वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में उपयोग करेंगे।

एक फर्नीचर व्यापारी दो वस्तुओं जैसे मेज़ और कुर्सियों का व्यवसाय करता है। निवेश के लिए उसके पास Rs 50,000 और रखने के लिए केवल 60 वस्तुओं के लिए स्थान है। एक मेज़ पर Rs 2500 और एक कुर्सी पर Rs 500 की लागत आती है। वह अनुमान लगाता है कि एक मेज़ को बेचकर वह Rs 250 और एक कुर्सी को बेचने से Rs 75 का लाभ कमा सकता है। मान लीजिए कि वह सभी वस्तुओं को बेच सकता है जिनको कि वह खरीदता है तब वह जानना चाहता है कि कितनी मेज़ों एवं कुर्सियों को खरीदना चाहिए ताकि उपलब्ध निवेश राशि पर उसका सकल लाभ अधिकतम हो।

इस प्रकार की समस्याओं जिनमें सामान्य प्रकार की समस्याओं में लाभ का अधिकतमीकरण और लागत का न्यूनतमीकरण खोजने का प्रयास किया जाता है, इष्टतमकारी समस्याएँ कहलाती हैं। अतः इष्टतमकारी समस्या में अधिकतम लाभ, न्यूनतम लागत या संसाधनों का न्यूनतम उपयोग सम्मिलित है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशेष लेकिन एक महत्त्वपूर्ण प्रकार की इष्टतमकारी समस्या है और उपरोक्त उल्लिखित इष्टतमकारी समस्या भी एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या है। उद्योग, वाणिज्य, प्रबंधन विज्ञान आदि में विस्तृत सुसंगतता के कारण रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ अत्यधिक महत्त्व की हैं।

इस अध्याय में, हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ और उनका आलेखी विधि द्वारा हल निकालने का अध्ययन करेंगे। यद्यपि इस प्रकार समस्याओं का हल निकालने के लिए अन्य विधियाँ भी हैं।

12.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या और उसका गणितीय सूत्रीकरण (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

हम अपना विचार विमर्श उपरोक्त उदाहरण के साथ प्रारंभ करते हैं जो कि दो चर राशियों वाली समस्या के गणितीय सूत्रीकरण अथवा गणितीय प्रतिरूप का मार्गदर्शन करेगा। इस उदाहरण में हमने ध्यानपूर्वक देखा कि

(i) व्यापारी अपनी धन राशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश कर सकता है। इसके अतिरिक्त वह निवेश के विभिन्न योजनात्मक विधियों से विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

(ii) कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण स्थितियाँ या व्यवरोधों का भी समावेश है जैसे उसका निवेश अधिकतम Rs 50,000 तक सीमित है तथा उसके पास अधिकतम 60 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है।

मान लीजिए कि वह कोई कुर्सी नहीं खरीदता केवल मेज़ों के खरीदने का निश्चय करता है, इसलिए वह $50,000 \div 2500$, या 20 मेज़ों को खरीद सकता है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs (250×20) या **Rs 5000** होगा।

मान लीजिए कि वह कोई मेज़ न खरीदकर केवल कुर्सियाँ ही खरीदने का चयन करता है। तब वह अपनी उपलब्ध Rs 50,000 की राशि में $50,000 \div 500$, अर्थात् 100 कुर्सियाँ ही खरीद सकता है। परंतु वह केवल 60 नगों को ही रख सकता है। अतः वह 60 कुर्सियाँ मात्र खरीदने के लिए बाध्य होगा। जिससे उसे सकल लाभ Rs 60×75 अर्थात् **Rs 4500** ही होगा।

ऐसी और भी बहुत सारी संभावनाएँ हैं। उदाहरण के लिए वह 10 मेज़ों और 50 कुर्सियाँ खरीदने का चयन कर सकता है, क्योंकि उसके पास 60 वस्तुओं को रखने का स्थान उपलब्ध है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs $(10 \times 250 + 50 \times 75)$, अर्थात् **Rs 6250** इत्यादि।

अतः हम ज्ञात करते हैं कि फर्नीचर व्यापारी विभिन्न चयन विधियों के द्वारा अपनी धन राशि का निवेश कर सकता है और विभिन्न निवेश योजनाओं को अपनाकर विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

अब समस्या यह है कि उसे अपनी धन राशि को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए किस प्रकार निवेश करना चाहिए? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें समस्या का गणितीय सूत्रीकरण करने का प्रयास करना चाहिए।

12.2.1 *समस्या का गणितीय सूत्रीकरण (Mathematical Formulation of the Problem)*

मान लीजिए कि मेज़ों की संख्या x और कुर्सियों की संख्या y है जिन्हें फर्नीचर व्यापारी खरीदता है। स्पष्टतः x और y ऋणेतर हैं, अर्थात्

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad \ldots (1) \\ y \geq 0 \quad \ldots (2) \end{array}\right\} \text{(ऋणेतर व्यवरोध)}$$

क्योंकि मेज़ों और कुर्सियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

व्यापारी (व्यवसायी) पर अधिकतम धन राशि (यहाँ यह Rs 50,000 है) का निवेश करने का व्यवरोध है और व्यवसायी के पास केवल अधिकतम वस्तुओं (यहाँ यह 60 है) को रखने के लिए स्थान का भी व्यवरोध है।

गणितीय रूप में व्यक्त करने पर

$$2500x + 500y \le 50{,}000 \quad \text{(निवेश व्यवरोध)}$$

या $$5x + y \le 100 \qquad \dots (3)$$

और $$x + y \le 60 \quad \text{(संग्रहण व्यवरोध)} \qquad \dots (4)$$

व्यवसायी इस प्रकार से निवेश करना चाहता है उसका लाभ Z (माना) अधिकतम हो और जिसे x और y के फलन के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$Z = 250x + 75y$ (उद्देशीय फलन कहलाता है)

प्रदत्त समस्या का अब गणितीय रूप में परिवर्तित हो जाती है:

$Z = 250x + 75y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जहाँ व्यवरोध निम्नलिखित है

$$5x + y \le 100$$

$$x + y \le 60$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

इसलिए हमें रैखिक फलन Z का अधिकतमीकरण करना है जबकि ऋणेतर चरों वाली रैखिक असमिकाओं के रूप कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए गए हैं। कुछ अन्य समस्याएँ भी हैं जिनमें रैखिक फलन का न्यूनतमीकरण किया जाता है जबकि ऋणेतर चर वाली रैखिक असमिकाओं के रूप में कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए जाते है। ऐसी समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन समस्या कहते हैं।

अत: एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या वह समस्या है जो कि x और y जैसे कुछ अनेक चरों के एक रैखिक फलन Z (जो कि उद्देश्य फलन कहलाता है) का इष्टतम सुसंगत/अनुकूलतम सुसंगत मान (अधिकतम या न्यूनतम मान) ज्ञात करने से संबंधित है। प्रतिबंध यह है कि चर ऋणेतर पूर्णांक हैं और ये रैखिक असमिकाओं के समुच्चय रैखिक व्यवरोधों को संतुष्ट करते हैं। रैखिक पद से तात्पर्य है कि समस्या में सभी गणितीय संबंध रैखिक हैं जबकि प्रोग्रामन से तात्पर्य है कि विशेष प्रोग्राम या विशेष क्रिया योजना ज्ञात करना।

आगे बढ़ने से पूर्व हम अब कुछ पदों (जिनका प्रयोग ऊपर हो चुका है) को औपचारिक रूप से परिभाषित करेंगे जिनका कि प्रयोग हम रैखिक प्रोग्राम समस्याओं में करेंगे:

उद्देश्य फलन रैखिक फलन $Z = ax + by$, जबकि a, b अचर है जिनका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है एक रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता है।

उपरोक्त उदाहरण में $Z = 250x + 75y$ एक रैखिक उद्देश्य फलन है। चर x और y निर्णायक चर कहलाते हैं।

व्यवरोध एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के चरों पर रैखिक असमिकाओं या समीकरण या प्रतिबंध व्यवरोध कहलाते हैं। प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ ऋणेतर व्यवरोध कहलाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में (1) से (4) तक असमिकाओं का समुच्चय व्यवरोध कहलाते हैं।

इष्टतम सुसंगत समस्याएँ निश्चित व्यवरोधों के अधीन असमिकाओं के समुच्चय द्वारा निर्धारित समस्या जो चरों (यथा दो चर x और y) में रैखिक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करे, इष्टतम सुसंगत समस्या कहलाती है। रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशिष्ट प्रकार की इष्टतम सुसंगत समस्या है। सुसंगत समस्या व्यापारी द्वारा मेज़ों तथा कुर्सियों की खरीद में प्रयुक्त एक इष्टतम सुसंगत समस्या तथा रैखिक प्रोग्रामन की समस्या का एक उदाहरण है।

अब हम विवेचना करेंगे कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को किस प्रकार हल किया जाता है। इस अध्याय में हम केवल आलेखीय विधि से ही संबंधित रहेंगे।

12.2.2 *रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की आलेखीय विधि (Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)*

कक्षा XI, में हम सीख चुके है कि किस प्रकार दो चरों x और y से संबंधित रैखिक असमीकरण निकायों का आरेख खींचते हैं तथा आरेखीय विधि द्वारा हल ज्ञात करते हैं। अब हमें अनुच्छेद 12.2 में विवेचन की हुई मेज़ों और कुर्सियों में निवेश की समस्या का उल्लेख करेंगे। अब हम इस समस्या को आरेख द्वारा हल करेंगे। अब हमें रैखिक असमीकरणों के रूप प्रदत्त व्यवरोधों का आरेख खींचें:

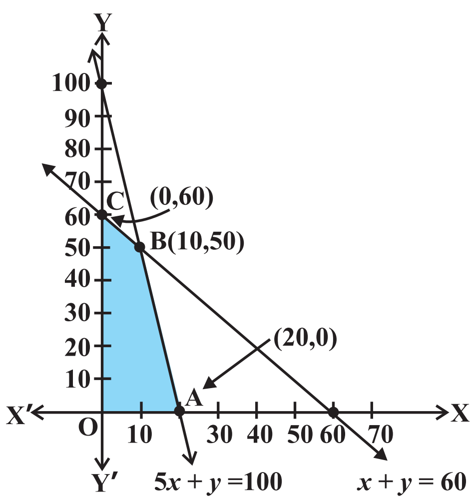
$$5x + y \leq 100 \qquad \dots (1)$$

$$x + y \leq 60 \qquad \dots (2)$$

$$x \geq 0 \qquad \dots (3)$$

$$y \geq 0 \qquad \dots (4)$$

इस निकाय का आरेख (छायांकित क्षेत्र) में असमीकरणों (1) से (4) तक के द्वारा नियत सभी अर्धतलों के उभयनिष्ठ बिंदुओं से निर्मित हैं। इस क्षेत्र में प्रत्येक बिंदु व्यापारी (व्यवसायी) को मेज़ों और कुर्सियों में निवेश करने के लिए सुसंगत विकल्प प्रस्तुत करता है। इसलिए यह क्षेत्र समस्या का सुसंगत क्षेत्र कहलाता है (आकृति 12.1)। इस क्षेत्र का प्रत्येक बिंदु समस्या का सुसंगत हल कहलाता है।



आकृति 12.1

अतः हम निम्न को परिभाषित करते हैं:

सुसंगत क्षेत्र प्रदत्त समस्या के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के ऋणेतर व्यवरोध $x, y \geq 0$ सहित सभी व्यवरोधों द्वारा नियत उभयनिष्ठ क्षेत्र सुसंगत क्षेत्र (या हल क्षेत्र) कहलाता है आकृति 12.1 में क्षेत्र OABC (छायांकित) समस्या के लिए सुसंगत क्षेत्र है। सुसंगत क्षेत्र के अतिरिक्त जो क्षेत्र है उसे असुसंगत क्षेत्र कहते हैं।

सुसंगत हल समूह सुसंगत क्षेत्र के अंतः भाग तथा सीमा के सभी बिंदु व्यवरोधों के सुसंगत हल कहलाते हैं। आकृति 12.1 में सुसंगत क्षेत्र OABC के अंतः भाग तथा सीमा के सभी बिंदु समस्या के सुसंगत हल प्रदर्शित कहते हैं। उदाहरण के लिए बिंदु (10, 50) समस्या का एक सुसंगत हल है और इसी प्रकार बिंदु (0, 60), (20, 0) इत्यादि भी हल हैं।

सुसंगत हल के बाहर का कोई भी बिंदु असुसंगत हल कहलाता हैं उदाहरण के लिए बिंदु (25, 40) समस्या का असुसंगत हल है।

इष्टतम/अनुकूलतम (सुसंगत) हल: सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) दे, एक इष्टतम हल कहलाता है।

अब हम देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र OABC में प्रत्येक बिंदु (1) से (4) तक में प्रदत्त सभी व्यवरोधों को संतुष्ट करता है और ऐसे अनंत बिंदु हैं। यह स्पष्ट नहीं है कि हम उद्देश्य फलन $Z = 250x + 75y$ के अधिकतम मान वाले बिंदु को किस प्रकार ज्ञात करने का प्रयास करें। इस स्थिति को हल करने के लिए हम निम्न प्रमेयों का उपयोग करेंगे जो कि रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में मूल सिद्धांत (आधारभूत) है। इन प्रमेयों की उपपति इस पुस्तक के विषय-वस्तु से बाहर है।

प्रमेय 1 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र* (उत्तल बहुभुज) है और माना कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z का एक इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) हो जहाँ व्यवरोधों से संबंधित चर x और y रैखिक असमीकरणों द्वारा व्यक्त हो तब यह इष्टतम मान सुसंगत क्षेत्र के कोने (शीर्ष) पर अवस्थित होने चाहिए।

प्रमेय 2 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र है तथा $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। यदि R परिबद्ध क्षेत्र हो तब उद्देश्य फलन Z, R में दोनों अधिकतम और न्यूनतम मान रखता है और इनमें से प्रत्येक R के कोनीय (corner) बिंदु (शीर्ष) पर स्थित होता है।

टिप्पणी यदि R अपरिबद्ध है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान का अस्तित्व नहीं भी हो सकता है। फिर भी यदि यह विद्यमान है तो R के कोनीय बिंदु पर होना चाहिए, (प्रमेय 1 के अनुसार)

उपरोक्त उदाहरण में परिबद्ध (सुसंगत) क्षेत्र के कोनीय बिंदु O, A, B और C हैं और बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करना सरल है यथा (0, 0), (20, 0), (10, 50) और (0, 60) क्रमशः कोनीय बिंदु हैं। अब हमें इन बिंदुओं पर, Z का मान ज्ञात करना है।

वह इस प्रकार है:

सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष	Z के संगत मान	
O (0,0)	0	
C (0,60)	4500	
B (10,50)	**6250** ⟵	अधिकतम
A (20,0)	5000	

हम निरीक्षण करते हैं कि व्यवसायी को निवेश योजना (10, 50) अर्थात् 10 मेज़ों और 50 कुर्सियों के खरीदने में अधिकतम लाभ होगा।

इस विधि में निम्न पदों का समाविष्ट हैं:

1. रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र ज्ञात कीजिए और उसके कोनीय बिंदुओं (शीर्ष) को या तो निरीक्षण से अथवा दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को दो रेखाओं की समीकरणों को हल करके उस बिंदु को ज्ञात कीजिए।
2. उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोनीय बिंदु पर ज्ञात कीजिए। माना कि M और m, क्रमशः इन बिंदुओं पर अधिकतम तथा न्यूनतम मान प्रदर्शित करते हैं।
3. (i) जब सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है, M और m, Z के अधिकतम और न्यूनतम मान हैं।
   (ii) ऐसी स्थिति में जब सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध हो तो हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करते हैं।
4. (a) M को Z का अधिकतम मान लेते हैं यदि $ax + by > M$ द्वारा प्राप्त अर्ध-तल का कोई बिंदु सुसंगत क्षेत्र में न पड़े अन्यथा Z कोई अधिकतम मान नहीं है।
   (b) इसी प्रकार, m, को Z का न्यूनतम मान लेते हैं यदि $ax + by < m$ द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल और सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा Z का कोई न्यूनतम मान नहीं है।

हम अब कुछ उदाहरणों के द्वारा कोनीय विधि के पदों को स्पष्ट करेंगे:

उदाहरण 1 आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए:

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + y \leq 50 \qquad \dots (1)$$

---

* सुसंगत क्षेत्र का कोनीय बिंदु क्षेत्र का ही कोई बिंदु होता है जो दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु है।

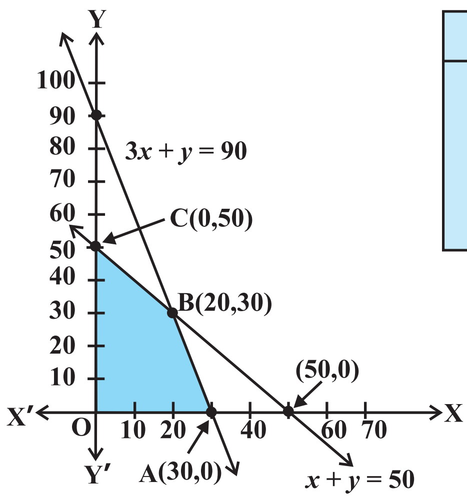
** एक रैखिक समीकरण निकाय का सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध कहा जाता है यदि यह एक वृत के अंतर्गत परिबद्ध किया जा सकता है अन्यथा इसे अपरिबद्ध कहते हैं। अपरिबद्ध से तात्पर्य है कि सुसंगत क्षेत्र किसी भी दिशा में असीमित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

$3x + y \le 90$ ... (2)

$x \ge 0, y \ge 0$ ... (3)

$Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए:

हल आकृति 12.2 में छायांकित क्षेत्र (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय के द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र है। हम निरीक्षण करते है कि सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है। इसलिए हम Z का अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करेंगे।



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	अधिकतम
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

आकृति 12. 2

कोनीय बिंदुओं O, A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (0, 0), (30, 0), (20, 30) और (0, 50) हैं। अब प्रत्येक कोनीय बिंदु पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

अत: बिंदु (30, 0) पर Z का अधिकतम मान 120 है।

उदाहरण 2 आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

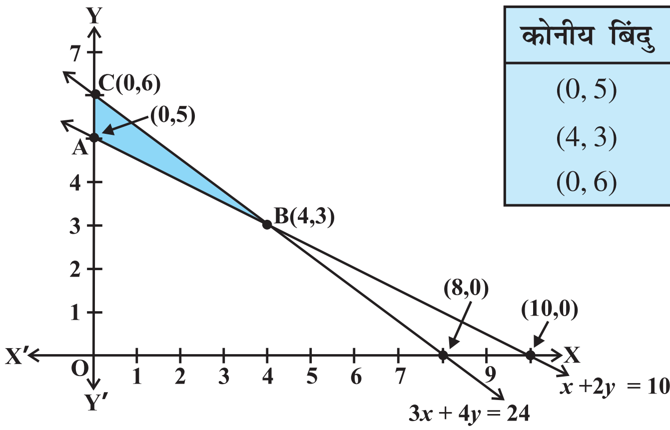
$x + 2y \ge 10$ ... (1)

$3x + 4y \le 24$ ... (2)

$x \ge 0, y \ge 0$ ... (3)

$Z = 200\,x + 500\,y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

हल आकृति 12.3 में छायांकित क्षेत्र, (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र ABC है जो परिबद्ध है। कोनीय बिंदुओं A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (0, 5), (4, 3) और (0, 6) हैं। हम इन बिंदुओं पर $Z = 200x + 500y$ का मान ज्ञात करते हैं



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान	
(0, 5)	2500	
(4, 3)	**2300**	← न्यूनतम
(0, 6)	3000	

आकृति 12.3

अत: बिंदु (4, 3) पर Z का न्यूनतम मान Rs 2300 प्राप्त होता है।

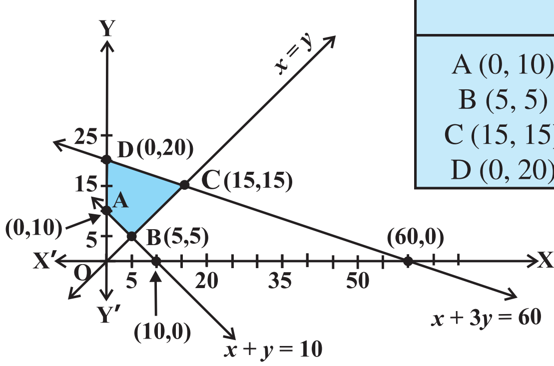
उदाहरण 3 आलेखीय विधि से निम्न समस्या को हल कीजिए:
निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 3y \leq 60 \qquad \ldots (1)$$
$$x + y \geq 10 \qquad \ldots (2)$$
$$x \leq y \qquad \ldots (3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \ldots (4)$$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक की रैखिक असमिकाओं के निकाय के सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते हैं। सुसंगत क्षेत्र ABCD को आकृति 12.4 में दिखाया गया है। क्षेत्र परिबद्ध है। कोनीय

कोनीय बिंदु	Z के संगत मान $Z = 3x + 9y$	
A (0, 10)	90	
B (5, 5)	**60**	← न्यूनतम
C (15, 15)	**180**	} ← अधिकतम
D (0, 20)	**180**	(बहु इष्टतम हल)



आकृति 12.4

बिंदुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (0, 10), (5, 5), (15, 15) और (0, 20) हैं। अब हम Z के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करते हैं।

सारणी से हम सुसंगत क्षेत्र बिंदु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 प्राप्त करते हैं।

Z का अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं प्रत्येक C (15, 15) और D (0, 20) पर 120 प्राप्त होता है।

टिप्पणी निरीक्षण कीजिए कि उपरोक्त उदाहरण में, समस्या कोनीय बिंदुओं C और D, पर समान इष्टतम हल रखती है, अर्थात् दोनों बिंदु वही अधिकतम मान 180 उत्पन्न करते हैं। ऐसी स्थितियों में दो कोनीय बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड CD पर प्रत्येक बिंदु तथा C और D भी एक ही अधिकतम मान देते हैं। वही उस स्थिति में भी सत्य है यदि दो बिंदु वही न्यूनतम मान उत्पन्न करते हैं।

उदाहरण 4 आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए:

$$2x - y \geq -5 \qquad \text{... (1)}$$

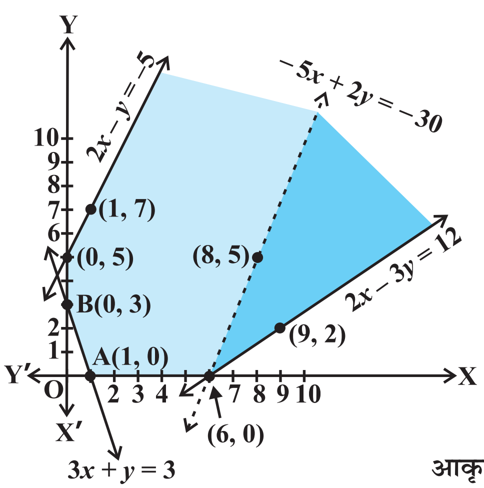
$$3x + y \geq 3 \qquad \text{... (2)}$$

$$2x - 3y \leq 12 \qquad \text{... (3)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \text{... (4)}$$

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक के असमीकरण निकाय द्वारा सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते है। आकृति 12.5 में सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है। निरीक्षण कीजिए कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है।

अब हम कोनीय बिंदुओं पर Z का मान भी ज्ञात करेंगे:



कोनीय बिंदु	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ⟵ सबसे कम

आकृति 12.5

इस सारणी से हम ज्ञात करते हैं कि कोनीय बिंदु (6, 0) पर Z का सबसे कम मान –300 है। क्या हम कह सकते हैं कि Z का न्यूनतम मान –300 है? ध्यान दीजिए कि यदि क्षेत्र परिबद्ध होता तो यह Z का सबसे कम मान (प्रमेय 2 से) होता। लेकिन हम यहाँ देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। इसलिए –300, Z का न्यूनतम मान हो भी सकता है और नहीं भी। इस समस्या का निष्कर्ष ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित असमीकरण का आलेख खींचते हैं:

$$-50x + 20y < -300$$

अर्थात्
$$-5x + 2y < -30$$

और जाँच कीजिए कि आलेख द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल व सुसंगत क्षेत्र में उभयनिष्ठ बिंदु हैं या नहीं है। यदि इसमें उभयनिष्ठ बिंदु हैं, तब Z का न्यूनतम मान –300 नहीं होगा। अन्यथा, Z का न्यूनतम मान –300 होगा।

जैसा कि आकृति 12.5 में दिखाया गया है। इसलिए, $Z = -50x + 20y$, का प्रदत्त व्यवरोधों के परिप्रेक्ष्य में न्यूनतम मान नहीं है।

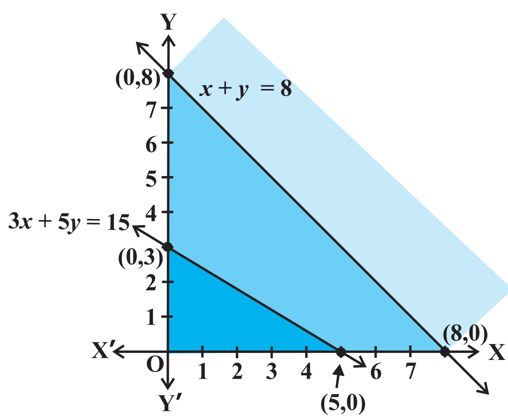
उपरोक्त उदाहरण मे क्या आप जाँच कर सकते हैं कि $Z = -50x + 20y$, (0, 5) पर अधिकतम मान 100 रखता है? इसके लिए, जाँच कीजिए कि क्या $-50x + 20y > 100$ का आरेख सुसंगत क्षेत्र के साथ उभयनिष्ठ बिंदु रखता है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:

$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$
$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

हल असमिकाओं (1) से (3) का आलेख खींचिए (आकृति 12.6)। क्या कोई सुसंगत क्षेत्र है? यह ऐसा क्यों है?

आकृति 12.6 से आप ज्ञात कर सकते है कि ऐसा कोई बिंदु नहीं है जो सभी व्यवरोधों को एक साथ संतुष्ट कर सके। अतः, समस्या का सुसंगत हल नहीं है।



आकृति 12.6

टिप्पणी उदाहरणों से जिनका विवेचन हम अब तक कर चुके हैं जिसके आधार पर हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं की सामान्य विशेषताओं का उल्लेख करते हैं।

(1) सुसंगत क्षेत्र सदैव उत्तल बहुभुज होता है।

(2) उद्देश्य फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) हल सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष पर

(कोने पर) स्थित होता है। यदि उद्देश्य फलन के दो कोनीय बिंदु (शीर्ष) एक ही अधिकतम (या न्यूनतम) मान प्रदान करते हैं तो इन बिंदुओं के मिलाने वाली रेखाखंड का प्रत्येक बिंदु भी समान अधिकतम (या न्यूनतम) मान देगा।

प्रश्नावली 12.1

ग्राफ़ीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए:

1. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

2. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \leq 8, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$

3. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$3x + 5y \leq 15, 5x + 2y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$

4. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए;
$x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$

5. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 15, x, y \geq 0$

6. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x, y \geq 0$

दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिंदुओं से अधिक बिंदुओं पर घटित होता है।

7. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \geq 0$

8. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200; x, y \geq 0$

9. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$

10. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$

ऐतिहासिक टिप्पणी

द्वितीय विश्व युद्ध में, जब युद्ध संचालन की योजना बनी, जिससे कि शत्रुओं को न्यूनतम व्यय पर अधिकतम हानि पहुँचे, रैखिक प्रोग्रामन विधि अस्तित्व में आई।

रैखिक प्रोग्रामन के क्षेत्र में प्रथम प्रोग्रामन का सूत्रपात रूसी गणितज्ञ L.Kantoro Vich तथा अमेरिकी अर्थशास्त्री F.L.Hitch Cock ने 1941 में किए। दोनों ने स्वतंत्र रूप से कार्य किया।

इस प्रोग्रामन को परिवहन-समस्या के नाम से जाना गया। सन् 1945 में अंग्रेज अर्थशास्त्री G.Stigler ने रैखिक प्रोग्रामन समस्या, के अंतर्गत इष्टतम आहार संबंधी समस्या का वर्णन किया। सन् 1947 में G.B. Dantzig ने एक दक्षता पूर्ण विधि जो सिंपलेक्स विधि के नाम से प्रसिद्ध है, का सुझाव दिया जो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को सीमित प्रक्रमों में हल करने की सशक्त विधि है।

रैखिक प्रोग्रामन विधि पर प्रारंभिक कार्य करने के कारण सन् 1975 में L.Katorovich और अमेरिकी गणितय अर्थशास्त्री T.C.Koopmans को अर्थ शास्त्र में नोबेल पुरस्कार प्रदान किया गया। परिकलन तथा आवश्यक सॉफ्टवेयर के आगमन के साथ कई क्षेत्रों की जटिल समस्याओं में रैखिक प्रोग्रामन प्रविधि के अनुप्रयोग में उत्तरोतर वृद्धि हो रही है।

12082CH13

अध्याय 13

प्रायिकता Probability

❖ The Theory of probabilities is simply the science of logic quantitatively treated – C.S. PEIRCE ❖

13.1 भूमिका (Introduction)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

पहले की कक्षाओं में हमने प्रायिकता को किसी यादृच्छिक परीक्षण की घटनाओं के घटित होने की अनिश्चितता की माप के रूप में पढ़ा था। हमने रूसी गणितज्ञ ए.एन. कौल्मोग्रोब (1903-1987) द्वारा प्रतिपादित अभिगृहितीय दृष्टिकोण का उपयोग किया था और प्रायिकता को परीक्षण के परिणामों पर परिभाषित फलन के रूप में निरूपित किया था। हमने समसंभाव्य परिणामों की दशा में प्रायिकता के अभिगृहितीय दृष्टिकोण और क्लासिकल सिद्धांत (classical theory) में समकक्षता भी स्थापित की थी। इस समकक्षता के आधार पर हमने असंतत प्रतिदर्श समष्टि की घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात की थी। हमने प्रायिकता के योग नियम का भी अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम किसी घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional probability) के बारे में विचार करेंगे, जबकि किसी अन्य घटना के घटित होने की सूचना हमारे पास हो, तथा इस महत्त्वपूर्ण अवधारणा की सहायता से बेज-प्रमेय (Bayes' theorem), प्रायिकता का गुणन नियम तथा स्वतंत्र घटनाओं के बारे में समझेंगे। हम यादृच्छिक चर (random variable) और इसके प्रायिकता बंटन की महत्त्वपूर्ण अवधारणा को भी समझेंगे तथा किसी प्रायिकता बंटन के माध्य (mean) व प्रसरण के बारे में भी पढ़ेंगे। अध्याय के अंतिम अनुभाग में हम एक महत्त्वपूर्ण असंतत प्रायिकता बंटन (discrete probability distribution) के बारे में पढ़ेंगे जिसे द्विपद बंटन कहा जाता है। इस अध्याय में हम ऐसे परीक्षण लेंगे जिनके परिणाम समसंभाव्य होते हैं, जब तक कि अन्यथा न कहा गया हो।

13.2 सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability)

अभी तक हमने किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने पर चर्चा की है। यदि हमें किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ दी गई हों, तो क्या किसी एक घटना के घटित होने की सूचना का प्रभाव दूसरी घटना

की प्रायिकता पर पड़ता है? आइए इस प्रश्न के उत्तर के लिए एक यादृच्छिक परीक्षण पर विचार करें जिसके परिणाम समसंभाव्य हैं।

आइए अब तीन न्याय्य (fair) सिक्कों को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

क्योंकि सिक्के न्याय्य हैं, इसलिए हम प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक प्रतिदर्श बिंदु की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ निर्दिष्ट कर सकते हैं। मान लीजिए E घटना "न्यूनतम दो चित प्रकट होना" और F घटना "पहले सिक्के पर पट प्रदर्शित होना" को निरूपित करते हैं।

तब $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

और $F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

इसलिए $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \text{ (क्यों ?)}$$

और $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

साथ ही $E \cap F = \{THH\}$

इसलिए $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

अब मान लीजिए हमें दिया गया है कि पहले सिक्के पर पट प्रकट होता है अर्थात् घटना F घटित हुई है, तब घटना E की प्रायिकता क्या है? F के घटित होने की सूचना पर यह निश्चित है कि E की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए उन प्रतिदर्श बिंदुओं पर विचार नहीं किया जाएगा जिनमें पहले सिक्के पर पट नहीं है। घटना E के लिए इस सूचना से प्रतिदर्श समष्टि S से घटकर इसका उपसमुच्चय F बन गया है। अन्य शब्दों में, इस अतिरिक्त सूचना ने हमें वास्तव में यह बताया है कि हालात को एक ऐसे नए यादृच्छिक परीक्षण के रूप में समझना चाहिए जिसका प्रतिदर्श समष्टि केवल उन परिणामों का समुच्चय है जो कि घटना F के अनुकूल है।

अब F का वह प्रतिदर्श बिंदु जो E के भी अनुकूल है; THH है। अत:

F को प्रतिदर्श समष्टि मानते हुए घटना E की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

या F का घटित होना दिया गया होने पर E की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

घटना E की इस प्रायिकता को सप्रतिबंध प्रायिकता कहते हैं, जबकि ज्ञात है कि घटना F घटित हो चुकी है, और इसे P (E|F) द्वारा दर्शाते हैं।

अर्थात् $P(E|F) = \frac{1}{4}$

नोट कीजिए कि F के वो अवयव जो घटना E के भी अनुकूल हैं, E तथा F के साझे अवयव होते हैं, अर्थात् $E \cap F$ के प्रतिदर्श बिंदु हैं।

अत: हम घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता, जबकि ज्ञात है कि घटना F घटित हो चुकी है को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P(E|F) = \frac{(E \cap F) \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिंदुओं की संख्या}}{F \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिंदुओं की संख्या}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

अब अंश व हर को प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की कुल संख्या से विभाजित करने पर हम देखते हैं कि P (E|F) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \ldots (1)$$

नोट कीजिए कि (1) तभी मान्य है जब $P(F) \neq 0$ अर्थात् $F \neq \phi$ (क्यों?)

अत: हम सप्रतिबंध प्रायिकता को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं:

परिभाषा 1 यदि E तथा F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से सबंधित दो घटनाएँ हैं, तो F के घटित होने की सूचना पर, E की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \text{ जबकि } P(F) \neq 0$$

13.2.1 *सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण (Properties of conditional probability)*

मान लें कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ हैं

गुण 1 P (S|F) = P (F|F) = 1

हमें ज्ञात है कि $$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

साथ ही $$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

अतः $$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

गुण 2 यदि A और B प्रतिदर्श समष्टि S की कोई दो घटनाएँ हैं और F एक अन्य घटना इस प्रकार है कि $P(F) \neq 0$, तब

$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F) - P[(A \cap B)|F]$

विशेष रूप से, यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों, तो

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

हम जानते हैं कि

$$P[(A \cup B)|F)] = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

(समुच्चयों के सर्वनिष्ठ पर सम्मिलन के बंटन नियम द्वारा)

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F)$$

जब A तथा B परस्पर अपवर्जी हों तो

$$P[(A \cap B)|F)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

अतः जब A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $P(A \cup B) = P(A|F) + P(B|F)$

गुण 3 $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

गुण 1 से हमें ज्ञात है कि $P(S|F) = 1$

$\Rightarrow \quad P[(E \cup E')|F)] = 1$ क्योंकि $S = E \cup E'$

$\Rightarrow \quad P(E|F) + P(E'|F) = 1$ क्योंकि E तथा E' परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं

अतः $$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 यदि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A|B)$ ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$

उदाहरण 2 एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

हल मान लीजिए b लड़के को व g लड़की को निरूपित करते हैं। परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \{(b,b), (g,b), (b,g), (g,g)\}$$

मान लीजिए E तथा F क्रमश: निम्नलिखित घटनाओं को दर्शाते हैं:

E : 'दोनों बच्चे लड़के हैं'

F : 'बच्चों में से कम से कम एक लड़का है'

तब $E = \{(b,b)\}$ और $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

अब $E \cap F = \{(b,b)\}$

अत: $P(F) = \frac{3}{4}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

इसलिए $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

उदाहरण 3 एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिख कर रखे गए और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो इस संख्या के सम होने की क्या प्रायिकता है?

हल मान लीजिए कि A घटना 'निकाले गए कार्ड पर सम संख्या है' और B घटना 'निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से बड़ी है' को निरूपित करते हैं। हमें $P(A|B)$ ज्ञात करना है।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

तब $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

और $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

अब $$P(A) = \frac{5}{10},\ P(B) = \frac{7}{10} \text{ और } P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

तब $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

उदाहरण 4 एक पाठशाला में 1000 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 430 लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि 430 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती हैं। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है?

हल मान लीजिए E घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है' और F घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़की है', को व्यक्त करते हैं। हमें P (E|F) ज्ञात करना है।

अब $$P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43 \text{ और } P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043 \quad \text{(क्यों?)}$$

तब $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$$

उदाहरण 5 एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण में घटना A तथा B को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है:

A : 'तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना'

B : 'पहली उछाल पर संख्या 6 और दूसरी उछाल पर संख्या 5 प्रकट होना'

यदि B का घटित होना दिया गया है, तो घटना A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल प्रतिदर्श समष्टि में 216 परिणाम हैं।

अब, $$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) \ldots (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) \ldots (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) \ldots (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

और $$A \cap B = \{(6,5,4)\}$$

अब $$P(B) = \frac{6}{216} \text{ और } P(A \cap B) = \frac{1}{216}$$

तब $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

उदाहरण 6 एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए E घटना 'संख्या 4 का न्यूनतम एक बार प्रकट होना' और F घटना 'दोनों पासों पर प्रकट संख्याओं का योग 6 होने' को दर्शाते हैं।

तब $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

और $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

हम जानते हैं कि $P(E) = \frac{11}{36}$, $P(F) = \frac{5}{36}$

तथा $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

अब $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

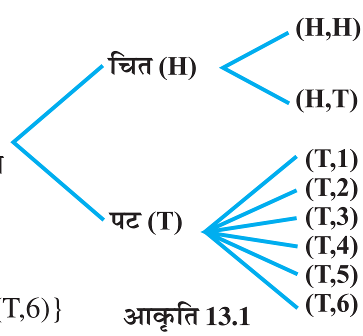
अतः वांछित प्रायिकता

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

अभी तक हमने उन परीक्षणों पर विचार किया है जिनके सभी परिणाम समसंभाव्य थे। इन परीक्षणों के लिए हमनें सप्रतिबंध प्रायिकता को परिभाषित किया है। तथापि सप्रतिबंध प्रायिकता की यही परिभाषा, व्यापक रूप से, उस स्थिति मे भी प्रयोग की जा सकती है, जब मौलिक घटनाएँ समसंभाव्य न हों। प्रायिकताओं $P(E \cap F)$ तथा $P(F)$ का परिकलन तदनुसार किया जाता है।
आइए निम्नलिखित उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरण 7 एक सिक्के को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो तो सिक्के को पुनः उछालें परंतु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो तो एक पासे को फेंकें। यदि घटना 'कम से कम एक पट प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना 'पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल परीक्षण के परिणामों को चित्र 13.1 से व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार के चित्र को वृक्षारेख कहते हैं।



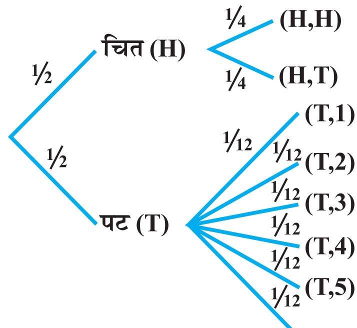
आकृति 13.1

परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

जहाँ (H,H) दर्शाता है कि दोनों उछालों पर चित प्रकट हुआ है, तथा (T, i) दर्शाता है कि पहली उछाल पर पट प्रकट हुआ और पासे को फेंकने पर संख्या i प्रकट हुई।

अत: 8 मौलिक घटनाओं (H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3) (T,4), (T,5), (T,6) की क्रमश: $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ प्रायिकता निर्धारित की जा सकती है, जैसा कि चित्र 13.2 से स्पष्ट है।



आकृति 13.2

मान लें F घटना 'न्यूनतम एक पट प्रकट होना' और E घटना 'पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना' को दर्शाते हैं।

तब $F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$

$E = \{(T,5),\ T,6)\}$ और $E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$

अब
$$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

और
$$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

अत:
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

प्रश्नावली 13.1

1. यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि P (E) = 0.6, P (F) = 0.3 और $P(E \cap F) = 0.2$, तो P (E|F) और P (F|E) ज्ञात कीजिए।

2. P(A|B) ज्ञात कीजिए, यदि P(B) = 0.5 और $P(A \cap B) = 0.32$

3. यदि P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 और P (B|A) = 0.4 ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cap B)$ (ii) P(A|B) (iii) $P(A \cup B)$

4. $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2\,P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B)=\frac{2}{5}$

5. यदि $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ तो ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक $P(E|F)$ ज्ञात कीजिए।

6. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है:

(i) E : तीसरी उछाल पर चित F : पहली दोनों उछालों पर चित

(ii) E : न्यूनतम दो चित F : अधिकतम एक चित

(iii) E : अधिकतम दो पट F : न्यूनतम दो पट

7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है:

(i) E : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है F : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है

(ii) E : कोई पट प्रकट नहीं होता है F कोई चित प्रकट नहीं होता है

8. एक पासे को तीन बार उछाला गया है:

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना

F : पहली दो उछालों पर क्रमश: 6 तथा 5 प्रकट होना

9. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया खड़े हैं:

E : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है F : पिता मध्य में खड़े हैं

10. एक काले और एक लाल पासे को उछाला गया है:

(a) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि काले पासे पर 5 प्रकट हुआ है।

(b) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

11. एक न्याय्य पासे को उछाला गया है। घटनाओं $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$, और $G = \{2,3,4,5\}$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $P(E|F)$ और $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ और $P(G|E)$

(iii) $P(E \cup F|G)$ और $P(E \cap F|G)$

12. मान लें कि जन्म लेने वाले बच्चे का लड़का या लड़की होना समसंभाव्य है। यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं, तो दोनों बच्चों के लड़की होने की सप्रतिबंध प्रायिकता क्या है, यदि यह दिया गया है कि (*i*) सबसे छोटा बच्चा लड़की है (*ii*) न्यूनतम एक बच्चा लड़की है।

13. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहु-विकल्पीय प्रकार के

कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है, तो एक आसान प्रश्न की बहु-विकल्पीय होने की प्रायिकता क्या होगी?

14. यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

15. एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्रकट संख्या 3 का गुणज है तो पासे को पुनः फेंकें और यदि कोई अन्य संख्या प्रकट हो तो एक सिक्के को उछालें। घटना 'न्यूनतम एक पासे पर संख्या 3 प्रकट होना' दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट प्रकट होने' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनें।

16. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ तब $P(A|B)$ है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) परिभाषित नहीं (D) 1

17. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ तब

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$ (C) $A \cap B = \phi$

(D) $P(A) = P(B)$

13.3 प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication Theorem on Probability)

मान लीजिए कि E तथा F एक प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ हैं। स्पष्टतया समुच्चय $E \cap F$ दोनों घटनाओं E तथा F के घटित होने को दर्शाता है। अन्य शब्दों में $E \cap F$ घटनाओं E तथा F के युगपत् घटित होने को दर्शाता है। घटना $E \cap F$ को EF भी लिखा जाता है।

प्रायः हमें सयुंक्त घटना EF की प्रायिकता ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, एक के बाद दूसरा पत्ता निकालने के परीक्षण में हम मिश्र घटना 'एक बादशाह और एक रानी' की प्रायिकता ज्ञात करने में इच्छुक हो सकते हैं। घटना EF की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम सप्रतिबंध प्रायिकता का उपयोग करते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

हम जानते हैं कि घटना F के दिए जाने पर घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता को $P(E|F)$ द्वारा दर्शाते हैं और इसे निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात करते हैं।

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

उपरोक्त परिणाम से हम लिख सकते हैं कि

$$P(E \cap F) = P(F) \,.\, P(E|F) \qquad \ldots (1)$$

हम यह भी जानते हैं कि

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

या $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$ (क्योंकि $E \cap F = F \cup E$)

अत: $P(E \cap F) = P(E)\ .\ P(F|E)$ ... (2)

(1) और (2) को मिलाने से हमें प्राप्त होता है कि

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(F).\ P(E|F) \text{ जब कि } P(E) \neq 0 \text{ और } P(F) \neq 0$$

उपरोक्त परिणाम को 'प्रायिकता का गुणन नियम' कहते हैं। आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 8 एक कलश में 10 काली और 5 सफ़ेद गेंदें हैं। दो गेंद एक के बाद एक निकाली जाती हैं और पहली गेंद दूसरे के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती हैं। मान लीजिए कि कलश में से प्रत्येक गेंद का निकालना समसंभाव्य है, तो दोनों काले गेंद निकलने की क्या प्रायिकता है?

हल माना कि E 'पहली काली गेंद के निकलने' की घटना है और F 'दूसरी काली गेंद के निकलने' की घटना है। हमें $P(E \cap F)$ या P (EF) ज्ञात करना है।

अब $$P(E) = P\ (\text{पहली निकाल में काली गेंद निकालना}) = \frac{10}{15}$$

साथ ही दिया गया है कि पहली निकाल में काली गेंद निकली है अर्थात् घटना E घटित हुई है, अब कलश में 9 काली गेंद और 5 सफ़ेद गेंद रह गई हैं। इसलिए, दूसरी गेंद काली होने की प्रायिकता जब कि पहली गेंद का काला होना हमें ज्ञात है, कुछ और नहीं केवल F का सप्रतिबंध प्रायिकता है जब E का घटित होना ज्ञात है।

अर्थात् $$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

अब प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(E)\ .\ P(F|E)\ .\ P(G|EF)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

दो से अधिक घटनाओं के लिए प्रायिकता का गुणन नियम यदि E, F और G एक प्रतिदर्श समष्टि की घटनाएँ हैं तो

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|E \cap F) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|EF)$$

इसी प्रकार प्रायिकता के गुणन नियम का विस्तार चार या अधिक घटनाओं के लिए भी किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण तीन घटनाओं के लिए प्रायिकता के गुणन नियम का दृष्टांत प्रस्तुत करता है।

उदाहरण 9 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता है?

हल मान लें कि K घटना 'निकाला गया पत्ता बादशाह है' को और A घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को व्यक्त करते हैं। स्पष्टतया हमें P (KKA) ज्ञात करना है।

अब $$P(K) = \frac{4}{52}$$

साथ ही P(K|K) यह ज्ञात होने पर कि 'पहले निकाला गया पत्ता बादशाह है' पर दूसरे पत्ते का बादशाह होने की प्रायिकता को दर्शाता है। अब गड्डी में $(52 - 1) = 51$ पत्ते हैं जिनमें तीन बादशाह है

इसलिए $$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

अंतत: P(A|KK) तीसरे निकाले गए पत्ते का इक्का होने की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब कि हमें ज्ञात है कि दो बादशाह पहले ही निकाले जा चुके हैं। अब गड्डी में 50 पत्ते रह गए हैं

इसलिए $$P(A|KK) = P(A|KK) = \frac{4}{50}$$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है कि

$$P(KKA) = P(K)\ P(K|K)\ P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events)

52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकालने के परीक्षण पर विचार कीजिए जिसमें प्रत्येक मौलिक घटना को समसंभाव्य माना गया है। यदि E तथा F क्रमश: घटनाओं 'निकाला गया पत्ता चिड़ी का है' और 'निकाला गया पत्ता एक इक्का है' को व्यक्त करते हैं, तो

$$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

साथ ही 'E और F' घटना 'निकाला गया पत्ता चिड़ी का इक्का है' को व्यक्त करती है, इसलिए

$$P(E \cap F) = \frac{1}{52}$$

अत: $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

क्योंकि $P(E) = \frac{1}{4} = P(E|F)$, हम कह सकते हैं कि घटना F के घटित होने की सूचना ने घटना E की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं डाला है।

हमें यह भी प्राप्त है कि

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$$

पुन: $P(F) = \frac{1}{13} = P(F|E)$ दर्शाता है कि घटना E के घटित होने की सूचना ने घटना F की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं डाला है।

अत: E तथा F इस प्रकार की घटनाएँ है कि किसी एक घटना के घटित होने की सूचना दूसरी घटना की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं डालती है।

इस प्रकार की घटनाओं को '***स्वतंत्र घटनाएँ***' कहते हैं।

परिभाषा 2 दो घटनाओं E तथा F को स्वतंत्र घटनाएँ कहते हैं यदि

$$P(F|E) = P(F) \text{ जबकी } P(E) \neq 0$$

$$P(E|F) = P(E) \text{ जबकी } P(F) \neq 0$$

अत: इस परिभाषा में P(E) और P(F) का शून्येत्तर होना आवश्यक है।

अब प्रायिकता के गुणन नियम से

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E) \qquad \dots (1)$$

यदि E और F स्वतंत्र घटनाएँ हों तो (1) से हमें प्राप्त होता है कि

$$P(E \cap F) = P(E).\ P(F) \qquad \dots (2)$$

अत: (2) के उपयोग से हम दो घटनाओं की स्वतंत्रता को निम्नलिखित तरह से भी परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 3 मान लें E और F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं, तो E और F स्वतंत्र घटनाएँ होती हैं यदि

$$P(E \cap F) = P(E)\ \ P(F)$$

टिप्पणी

1. दो घटनाओं E तथा F को पराश्रित (dependent) कहते हैं, यदि वे स्वतंत्र न हों अर्थात् यदि $P(E \cap F) \neq P(E) \,.\, P(F)$
2. कभी-कभी स्वतंत्र घटनाओं और परस्पर अपवर्जी घटनाओं के बीच भ्रम पैदा हो जाता है। 'स्वतंत्र घटनाओं' की परिभाषा 'घटनाओं की प्रायिकता' के रूप में की गई है जब कि 'परस्पर अपवर्जी घटनाओं' की परिभाषा 'घटनाओं' के रूप में की गई है। इसके अतिरिक्त, परस्पर अपवर्जी घटनाओं में कोई भी परिणाम सार्व कदापि नहीं हो सकता है किंतु स्वतंत्र घटनाओं में

परिणाम सार्व भी हो सकते हैं, यदि प्रत्येक घटना अरिक्त है। स्पष्टतया 'स्वतंत्र घटनाएँ' और 'परस्पर अपवर्जी घटनाएँ' समानार्थी नहीं हैं।

दूसरे शब्दों में, यदि दो ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ घटती हैं जिनकी प्रयिकता शून्येतर है, तो वह परस्पर अपवर्जी नहीं हो सकती हैं। विलोमतः यदि दो शून्येतर प्रायिकता वाली परस्पर अपवर्जी घटनाएँ घटती हैं, तो वह स्वतंत्र नहीं हो सकती हैं।

3. दो यादृच्छिक परीक्षण स्वतंत्र कहलाते हैं, यदि प्रत्येक घटना युग्म E और F के लिए, जहाँ E पहले परीक्षण से तथा F दूसरे परीक्षण से संबंधित हैं, घटनाओं E तथा F के एक साथ घटित होने की प्रायिकता, जब दोनों परीक्षण संपन्न किए जाएँ, प्रायिकता P(E) और P(F) के गुणनफल के बराबर होती हैं, जिनका परिकलन दोनों परीक्षणों के आधार पर अलग-अलग किया जाता है। अर्थात् $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$

4. तीन घटनाओं A, B और C को स्वतंत्र कहा जाता है यदि और केवल यदि

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

और $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ \ P(C)$$

यदि उपरोक्त में से कम से कम एक भी शर्त सत्य नहीं होती है तो दी गई घटनाओं को स्वतंत्र नहीं कहा जाता है।

उदाहरण 10 एक पासे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है', को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है', को F से निरूपित किया जाए तो बताएँ क्या घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं?

हल हम जानते हैं कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अब $$E = \{3, 6\},\ F = \{2, 4, 6\} \text{ और } E \cap F = \{6\}$$

तब $$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ और } P(E \cap F) = \frac{1}{6}$$

स्पष्टतया $$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

अतः E और F स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 11 एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए।

हल यदि सभी 36 मौलिक घटनाओं को समसंभाव्य मान लें तो

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ और } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

साथ ही $P(A \cap B) = P$ (दोनों उछालों में विषम संख्या प्राप्त होना)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

अब $$P(A)\ .\ P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

स्पष्टतया $P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$

अत: A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 12 तीन सिक्कों को उछाला गया है। मान लें E घटना 'तीन चित या तीन पट प्राप्त होना' और F घटना 'न्यूनतम दो चित प्राप्त होना' और G घटना 'अधिकतम दो पट प्राप्त होना' को निरूपित करते हैं। युग्म (E,F), (E,G) और (F,G) में कौन-कौन से स्वतंत्र हैं? कौन-कौन से पराश्रित हैं?

हल परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है :

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

स्पष्टतया $E = \{HHH, TTT\}$, $F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

और $G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

साथ ही $E \cap F = \{HHH\}$, $E \cap G = \{TTT\}$, $F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$

इसलिए $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(G) = \frac{7}{8}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(E \cap G) = \frac{1}{8},\ P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

साथ ही $P(E)\ .\ P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$ और $P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$

अत: $P(E \cap F) = P(E)\ .\ P(F)$

$P(E \cap G) \neq P(E)\ .\ P(G)$

और $P(F \cap G) \neq P(F)\ .\ P(G)$

इसलिए घटनाएँ (E और F) स्वतंत्र हैं जबकी घटनाएँ (F और G) और (E और G) पराश्रित हैं।

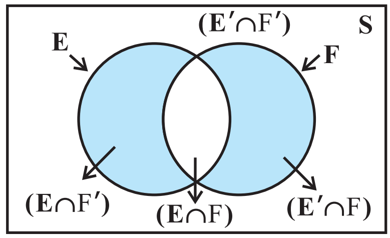
उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो E और F′ भी स्वतंत्र होंगी।

हल क्योंकि E तथा F स्वतंत्र है, इसलिए

$$P(E \cap F) = P(E)\ .\ P(F) \qquad \dots (1)$$

चित्र 13.3, के वेन-आरेख से यह स्पष्ट है कि $E \cap F$ और $E \cap F'$ परस्पर अपवर्जी हैं और साथ ही

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$$



आकृति 13.3

क्योंकि $E \cap F$ और $E \cap F'$ परस्पर अपवर्जी हैं,

इसलिए $\quad P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

या $\quad P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) \,.\, P(F)$ (1) से

$= P(E)\ [1 - P(F]$

$= P(E) \,.\, P(F')$

अतः E और F' स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

> **टिप्पणी** इसी प्रकार यह दर्शाया जा सकता है कि यदि
> (a) E' तथा F स्वतंत्र हैं
> (b) E' तथा F' स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 14 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $= 1 - P(A')\ P(B')$

हल P(A या B में से न्यूनतम एक का होना) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$

$= P(A) + P(B)\ [1 - P(A)]$

$= P(A) + P(B) \,.\, P(A')$

$= 1 - P(A') + P(B)\, P(A')$

$= 1 - P(A')\ [1 - P(B)]$

$= 1 - P(A')\ P(B')$

प्रश्नावली 13.2

1. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।
2. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. संतरों के एक डिब्बे का निरीक्षण उसमें से तीन संतरों को यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए हुए निकाल कर किया जाता है। यदि तीनों निकाले गए संतरे अच्छे हों तो डिब्बे को बिक्री के

लिए स्वीकृत किया जाता है अन्यथा अस्वीकृत कर देते हैं। एक डिब्बा जिसमें 15 संतरे हैं जिनमें से 12 अच्छे व 3 खराब संतरे हैं, के बिक्री के लिए स्वीकृत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं या नहीं?

5. एक पासे पर 1, 2, 3 लाल रंग से और 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए हैं। इस पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'संख्या सम है' और B घटना 'संख्या लाल रंग से लिखी गई है', को निरूपित करते हैं। क्या A और B स्वतंत्र हैं?

6. मान लें E तथा F दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ तब क्या E तथा F स्वतंत्र हैं?

7. A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = p$. p का मान ज्ञात कीजिए यदि (i) घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं। (ii) घटनाएँ स्वतंत्र हैं।

8. मान लें A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$ और $P(B) = 0.4$. तब

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$ ज्ञात कीजिए।

9. दी गई घटनाएँ A और B ऐसी हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ तब P(A-नहीं और B-नहीं) ज्ञात कीजिए।

10. मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{1}{2}$ तथा $P(B) = \frac{7}{12}$ और P(A-नहीं और B-नहीं) $= \frac{1}{4}$. क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं?

11. A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ तो

(i) P(A और B) (ii) P(A और B-नहीं)

(iii) P(A या B) (iv) P(A और B में कोई भी नहीं) का मान ज्ञात कीजिए।

12. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. दो गेंद एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित किए निकाली जाती है। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंदें हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए (i) दोनों गेंदें लाल हों (ii) प्रथम काली एवं दूसरी लाल हो (iii) एक काली तथा दूसरी लाल हो।

14. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) समस्या हल हो जाती है

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

15. ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। निम्नलिखित में से किन दशाओं में घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं?

(i) E : 'निकाला गया पत्ता हुकुम का है'

F : 'निकाला गया पत्ता इक्का है'

(ii) E : 'निकाला गया पत्ता काले रंग का है'

F : 'निकाला गया पत्ता एक बादशाह है'

(iii) E : 'निकाला गया पत्ता एक बादशाह या एक बेगम है'

F : 'निकाला गया पत्ता एक बेगम या एक गुलाम है'

16. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिंदी का, 40% अंग्रेज़ी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।

(a) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिंदी और न ही अंग्रेज़ी का अखबार पढ़ती है।

(b) यदि वह हिंदी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेज़ी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(c) यदि वह अंग्रेज़ी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिंदी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है?

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं, यदि

(A) A और B परस्पर अपवर्जी हैं (B) $P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 बेज़-प्रमेय (Bayes' Theorem)

मान लीजिए कि दो थैले I और II दिए गए हैं। थैला I में 2 सफ़ेद और 3 लाल गेंदें हैं। और थैला II में 4 सफ़ेद और 5 लाल गेंदें हैं। किसी एक थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। हम किसी एक थैले को चुनने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ ज्ञात कर सकते हैं या किसी विशेष थैले (मान लें थैला I) में से एक विशेष रंग (मान लें सफ़ेद) गेंद को निकालने की प्रायिकता भी ज्ञात कर सकते हैं। अन्य शब्दों में हम किसी विशेष रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं, यदि हमें यह दिया गया हो कि गेंद कौन-से थैले से निकाली गई है। लेकिन क्या हम इस बात की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं कि गेंद किसी विशेष थैले (मान लें थैला-II) से निकाली गई है यदि हमें निकाली गई गेंद का रंग पता है? यहाँ हमें थैला-II के चुनने की प्रतिलोम (reverse)प्रायिकता ज्ञात करनी है जबकि इसके बाद होने वाली घटना का हमें ज्ञान है। प्रसिद्ध गणितज्ञ जॉन बेज़ ने प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने की समस्या का समाधान सप्रतिबंध प्रायिकता के उपयोग द्वारा किया है। उनके द्वारा बनाया गया सूत्र 'बेज़-प्रमेय' के नाम से जाना जाता है जो उनकी मृत्योपरांत 1763 में प्रकाशित हुआ था। बेज़-प्रमेय के कथन व प्रमाण से पूर्व आइए एक परिभाषा और कुछ प्रारंभिक परिणामों पर विचार कीजिए।

13.5.1 *एक प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन (Partition of a sample space)*

घटनाओं $E_1, E_2 \ldots E_n$ के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है यदि

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ तथा

(c) $P(E_i) > 0$, प्रत्येक $i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए

दूसरे शब्दों में, घटनाएँ $E_1, E_2, \ldots E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करती हैं यदि वे युग्मत: असंयुक्त हैं, समग्र है तथा उनकी प्रायिकता शून्येतर है।

उदाहरणत: हम देखते हैं कि कोई घटना E और उसकी पूरक घटना E′ प्रतिदर्श समष्टि S का विभाजन है क्योंकि $E \cap E' = \phi$ और $E \cup E' = S$.

वेन-आरेख चित्र 13.3, से हम आसानी से प्रेक्षण कर सकते हैं कि यदि E और F किसी प्रतिदर्श समष्टि S, के संगत कोई दो घटनाएँ हैं, तो $\{E \cap F, E \cap F'\}$ समुच्चय E का एक विभाजन है।

समुच्चय $\{E' \cap F, E \cap F, E \cap F'\}$ समुच्चय $E \cup F$ का एक विभाजन है और समुच्चय $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ संपूर्ण प्रतिदर्श S का एक विभाजन है।

अब हम संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

13.5.2 *संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय (Theorem of Total Probability)*

मान लें $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S, का एक विभाजन है और मान लें कि प्रत्येक घटना $E_1, E_2, \ldots, E_n$ की प्रायिकता शून्येत्तर है। मान लीजिए A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक

घटना है, तब,

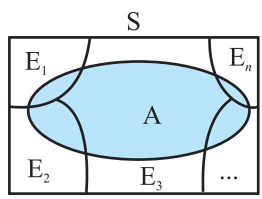
$$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + ... + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

उपपत्ति दिया गया है कि $E_1, E_2, ..., E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है (चित्र 13.4) इसलिए,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ... (1)$$

और $E_i \cap E_j = \phi\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$



आकृति 13.4

हमें ज्ञात है कि किसी घटना A, के लिए

$$A = A \cap S$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 ... E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

साथ ही $A \cap E_i$, और $A \cap E_j$, क्रमशः समुच्चयो E_i और E_j के उपसमुच्चय हैं जो $i \neq j$, के लिए असंयुक्त है इसलिए $i \neq j,\ i, j = 1, 2 ..., n$ के लिए $A \cap E_i$ और $A \cap E_j$ भी असंयुक्त हैं।

इसलिए $$P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .....\cup (A \cap E_n)]$$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

अब $P(A \cap E_i) = P(E_i)\ P(A|E_i)$ क्योंकि $P\ (E_i) \neq 0 \forall i = 1,2,..., n$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हम जानते हैं कि

इसलिए $$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + ... + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

या $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

उदाहरण 15 किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि 'निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने' की घटना को A और 'हड़ताल होने' की घटना को B द्वारा निरूपित किया जाता है। हमें P(A) ज्ञात करना है। हमें ज्ञात है कि

$$P(B) = 0.65,\ P\ (\text{हड़ताल नहीं}) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

$$P(A \mid B) = 0.32,\ P(A \mid B') = 0.80$$

क्योंकि घटनाएँ B और B′ समष्टि समुच्चय के विभाजन हैं इसलिए संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय द्वारा

$$= P(B)\ .\ P(A \mid B) + P(B')\ P(A \mid B')$$

$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$
$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

अतः निर्माण कार्य समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता 0.488 है।

अब हम बेज़-प्रमेय का प्रकथन करेंगे तथा इसे सिद्ध करेंगे।

बेज़-प्रमेय (Bayes' Theorem) यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ अरिक्त घटनाएँ हैं जो कि प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1, E_2, ..., E_n$ युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1 \cup E_2 \cup ,..., \cup E_n = S$ और A कोई ऐसी घटना है जिसकी प्रायिकता शून्येतर है, तो

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

उपपत्ति हमें ज्ञात है कि

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)} \qquad \text{(प्रायिकता के गुणन नियम से)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)} \qquad \text{(संपूर्ण प्रायिकता के नियम से)}$$

टिप्पणी बेज़-प्रमेय के अनुप्रयोग में निम्नलिखित शब्दावली का उपयोग करते हैं
घटनाओं $E_1, E_2, ... E_n$ को परिकल्पनाएँ (hypotheses) कहते हैं।

$P(E_i)$ को परिकल्पना E_i की पूर्वकालीन (a priori) प्रायिकता कहते हैं। सप्रतिबंध प्रायिकता $P(E_i|A)$ को परिकल्पना E_i की उत्तरकालीन (a posteriori) प्रायिकता कहते हैं।

बेज़ प्रमेय को 'कारणों' की प्रायिकता का सूत्र भी कहा जाता है। क्योंकि E_i प्रतिदर्श समष्टि S के एक विभाजन का निर्माण करते हैं इसलिए घटनाओं E_i में से एक समय में एक और केवल एक ही घटित होती है (अर्थात् E_i में से केवल एक ही घटना घटती है और एक से अधिक नहीं घट सकती है) अतः उपरोक्त सूत्र हमें किसी विशेष E_i (अर्थात् एक कारण) की प्रायिकता देता है जबकि घटना A का घटित होना दिया गया है।

बेज़-प्रमेय की विविध परिस्थितियों में उपयोगिता है। इनमें से कुछ को निम्नलिखित उदाहरणों में स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 16 दो थैले I और II दिए हैं। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जब कि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले II से निकाली गई है?

हल थैले I का चयन होना को E_1 से और थैले II के चयन को E_2 मान लीजिए। मान लीजिए कि लाल रंग की गेंद निकलने की घटना को A से निरूपित करते हैं।

तब $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

साथ ही $$P(A|E_1) = P(\text{थैले I में से लाल रंग की गेंद निकालना}) = \frac{3}{7}$$

और $$P(A|E_2) = P(\text{थैले II में से लाल रंग की गेंद निकालना}) = \frac{5}{11}$$

अब थैले II में से गेंद निकालने की प्रायिकता, जब कि यह ज्ञात है कि वह लाल रंग की है $= P(E_2|A)$, बेज़-प्रमेय द्वारा

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A\,|\,E_2)}{P(E_1)P\,(A\,|\,E_1)+P(E_2)P(A\,|\,E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

उदाहरण 17 तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहाँ प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चाँदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चाँदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है?

हल मान लें E_1, E_2 और E_3 क्रमशः डिब्बे I, II और III के चयन को निरूपित करते हैं

तब $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

साथ ही मान लें A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $$P(A|E_1) = P(\text{डिब्बे I से सोने का सिक्का निकलना}) = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A|E_2) = P(\text{डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकलना}) = 0$$

$$P(A|E_3) = P(\text{डिब्बे III से सोने का सिक्का निकलना}) = \frac{1}{2}$$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता

= निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता

$= P(E_1|A)$

अब बेज़-प्रमेय द्वारा

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)PA|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 18 मान लें कि एक एच.आई.वी. परीक्षण की विश्वसनीयता निम्नलिखित प्रकार से निर्दिष्ट की गई है।

एच.आई.वी. पोजीटिव व्यक्तियों के लिए परीक्षण 90% पता लगाने में और 10% पता न लगाने में सक्षम है। एच.आई.वी. से स्वतंत्र व्यक्तियों के लिए परीक्षण, 99% सही पता लगाता है यानी एच. आई.वी नेगेटिव बताता है जबकि 1% परीक्षित व्यक्तियों के लिए एच.आई.वी. पोजीटिव बताता है। एक बड़ी जनसंख्या, जिसमें 0.1% व्यक्ति एच.आई.वी. ग्रस्त है, में से एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और उस का परीक्षण किया जाने पर रोगविज्ञानी एच.आई.वी. की उपस्थिति बताता है। क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में एच.आई.वी. (पोजीटिव) है?

हल मान लें E चुने गए व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की घटना और A व्यक्ति के एच.आई.वी. परीक्षण में पोजीटिव होने की घटना को दर्शाते हैं। हमें $P(E|A)$ ज्ञात करना है।

साथ ही E' चुने गए व्यक्ति के एच.आई.वी. पोजीटिव न होने की घटना को दर्शाता है।

स्पष्टतया $\{E, E'\}$ जनसंख्या में सभी व्यक्तियों के प्रतिदर्श समष्टि का एक विभाजन है। हमें ज्ञात है

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E) = P$ (व्यक्ति का परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव है) $= 90\% = \frac{9}{10} = 0.9$

और $P(A|E') = P$ (व्यक्ति का परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जब कि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव नहीं है) $= 1\% = 0.01$

अब बेज़-प्रमेय द्वारा

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001\times0.9}{0.001\times0.9+0.999\times0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083 \text{ (लगभग)}$$

अतः एक यादृच्छया चुने गए व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की प्रायिकता जब कि ज्ञात है कि उसका एच.आई.वी. परीक्षण पोजीटिव है, 0.083 है।

उदाहरण 19 एक बोल्ट बनाने के कारख़ाने में मशीनें (यंत्र) A, B और C कुल उत्पादन का क्रमशः 25%, 35% और 40% बोल्ट बनाती हैं। इन मशीनों के उत्पादन का क्रमशः 5, 4, और 2 प्रतिशत भाग खराब (त्रुटिपूर्ण) हैं। बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है?

हल मान लिया कि घटनाएँ B_1, B_2, B_3 निम्न प्रकार हैः

B_1 : बोल्ट मशीन A द्वारा बनाया गया है

B_2 : बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है

B_3 : बोल्ट मशीन C द्वारा बनाया गया है

स्पष्ट है कि घटनाएँ B_1, B_2, B_3 परस्पर अपवर्जी और परिपूर्ण है। मान लिया कि घटना E निम्न प्रकार हैः E बोल्ट खराब है।

घटना E, घटनाओं B_1 या B_2 या B_3 के साथ घटित होती है। दिया हैः

$$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ P(B_2) = 0.35 \text{ और } P(B_3) = 0.40$$

पुनः $P(E|B_1)$ = बोल्ट के खराब होने की प्रायिकता जब कि दिया हो कि वह मशीन B द्वारा निर्मित है

$$= 5\% = 0.05$$

इसी प्रकार $P(E|B_2) = 0.04,\ P(E|B_3) = 0.02$

बेज़-प्रमेय द्वारा हमें ज्ञात है कि

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E+|B_3)}$$

$$= \frac{0.35\times0.04}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02} = \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

उदाहरण 20 एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ है यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3},$ या $\frac{1}{12}$ है, परंतु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि 'डॉक्टर के रोगी के यहाँ देर से आने' की घटना E है। यदि डॉक्टर के ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन द्वारा आने की घटनाएँ क्रमशः T_1, T_2, T_3, और T_4 हो, तो

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10} \text{ और } P(T_4) = \frac{2}{5} \qquad \text{(दिया है)}$$

$$P(E|T_1) = \text{डॉक्टर के ट्रेन द्वारा आने पर देर से पहुँचने की प्रायिकता} = \frac{1}{4}$$

इसी प्रकार, $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E|T_4) = 0$, क्योंकि अन्य वाहन द्वारा आने पर उसे देरी नहीं होती।

अब बेज़-प्रमेय द्वारा

$P(T_1|E)$ = डॉक्टर द्वारा देर से आने पर ट्रेन द्वारा आने की प्रायिकता

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1) + P(T_2)P(E|T_2) + P(T_3)P(E|T_3) + P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

उदाहरण 21 एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

हल मान लीजिए कि E, 'व्यक्ति द्वारा पासे को उछाल कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है' की घटना है। मान लीजिए कि S_1, पासे पर संख्या 6 आने की घटना और S_2 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना हैं। तब

$$P(S_1) = \text{संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता} = \frac{1}{6}$$

$$P(S_2) = \text{संख्या 6 नहीं आने की घटना की प्रायिकता} = \frac{5}{6}$$

$P(E|S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे कि संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता

$$= \text{व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता} = \frac{3}{4}$$

$P(E|S_2)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

$$= \text{व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

अब बेज़-प्रमेय द्वारा

$P(S_1|E)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है

$$= \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1) + P(S_2)P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

एक यादृच्छिक चर वह फलन होता है जिसका प्रांत किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है।

उदाहरण के लिए, आइए एक सिक्के को दो बार अनुक्रम में उछाले जाने के परीक्षण पर विचार कीजिए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

यदि X, प्राप्त चितों की संख्या को व्यक्त करता है तो X एक यादृच्छिक चर है और प्रत्येक परिणाम के लिए इसका मान निम्न प्रकार से दिया गया है:

$$X (HH) = 2, X (HT) = 1, X (TH) = 1, X (TT) = 0.$$

एक ही प्रतिदर्श समष्टि पर एक से अधिक यादृच्छिक चर परिभाषित किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए मान लें कि Y, प्रतिदर्श समष्टि S के प्रत्येक परिणाम के लिए चितों की संख्या से पटों की संख्या के घटाव को व्यक्त करता है। तब

$$Y (HH) = 2, Y (HT) = 0, Y (TH) = 0, Y (TT) = -2.$$

अत: एक प्रतिदर्श समष्टि S में X और Y दो भिन्न यादृच्छिक चर परिभाषित किए गए हैं।

प्रश्नावली 13.3

1. एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुन: कलश में रख दी जाती है। पुन: निकाले गए रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती है तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंदें की लाल होने की प्रायिकता क्या है?

2. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है?

3. यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों में से 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते हैं। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रों में से 30% और छात्रावास में न रहने वाले छात्रों में से 20% छात्रों ने A–ग्रेड लिया। वर्ष के अंत में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A-ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास मे रहने वाला है?

4. एक बहुविकल्पी प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है और अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। मान लें कि छात्र के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है?

5. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किंतु 0.5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत रिपोर्ट देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रस्त बतलाता है। यदि किसी जनसमुदाय में 0.1% लोग उस रोग से ग्रस्त है तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है?

6. तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा अनभितन सिक्का है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है?

7. एक बीमा कंपनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.01, 0.03 और 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है?

8. एक कारखाने में A और B दो मशीने लगी हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A और 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% और मशीन B का 1% उत्पादन खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी?

9. दो दल एक निगम के निदेशक मंडल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किया गया था।

10. मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'चितों' की संख्या नोट करती है। यदि उसे 1, 2, 3 या 4 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ। यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

11. एक व्यावसायिक निर्माता के पास A, B तथा C मशीन ऑपरेटर हैं। प्रथम ऑपरेटर A 1% खराब सामग्री उत्पादित करता हैं तथा ऑपरेटर B और C क्रमशः 5% और 7% खराब सामग्री उत्पादित करता है। कार्य पर A कुल समय का 50% लगाता है, B कुल समय का 30% तथा C कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक खराब सामग्री उत्पादित है तो इसे A द्वारा उत्पादित किए जाने की प्रायिकता क्या है?

12. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

13. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तो निम्न में से कौन ठीक है:

(A) $P(A \mid B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) इनमें से कोई नहीं

विविध उदाहरण

उदाहरण 22 चार डिब्बों में रगींन गेंदें निम्न सारणी में दर्शाए गए तरह से आंबटित की गई है:

डिब्बा	रंग			
	काला	सफेद	लाल	नीला
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

एक डिब्बे को यादृच्छया चुना गया और फिर उसमें से एक गेंद निकाली गई। यदि गेंद का रंग काला है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि गेंद को डिब्बा- III से निकाला गया है?

हल मान लीजिए A, E_1, E_2, E_3 और E_4 निम्न प्रकार से परिभाषित घटनाएँ हैं:

A : एक काली गेंद का निकलना $\qquad$ E_1 : डिब्बा-I का चुनाव

E_2 : डिब्बा-II का चुनाव $\qquad$ E_3 : डिब्बा-III का चुनाव

E_4 : डिब्बा-IV का चुनाव

क्योंकि डिब्बों को यादृच्छया चुना गया है,

इसलिए $\qquad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

साथ ही $\qquad P(A|E_1) = \frac{3}{18}$, $P(A|E_2) = \frac{2}{8}$, $P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ और $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$

P(डिब्बा - III का चुनाव, जब यह ज्ञात है कि काली गेंद निकाली गई है)

$= P(E_3|A)$ बेज़-प्रमेय से

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3).P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

उदाहरण 23 A और B बारी-बारी से एक पासे को उछालते हैं जब तक कि उनमें से कोई एक पासे पर छः प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता। यदि A खेल को शुरू करें तो उनके जीतने की क्रमशः प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए S सफलता (पासे पर 6 प्रकट होना) को और F असफलता (पासे पर 6 प्रकट न होना) को व्यक्त करते हैं।

अतः $$\mathrm{P(S)}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P(F)}=\frac{5}{6}$$

P(A के पहली उछाल में जीतना) $= \mathrm{P(S)} = \frac{1}{6}$

A को तीसरी उछाल का अवसर तब मिलता है जब A पहली उछाल में और B दूसरी उछाल में असफल होते हैं। इसलिए

P(A का तीसरी उछाल में जीतना) $= \mathrm{P(FFS)} = \mathrm{P(F)P(F)P(S)} = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$

इसी प्रकार P(A का पाँचवीं उछाल में जीतना) $= \mathrm{P\ (FFFFS)} = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$

और इसी प्रकार अन्य अतः P(A जीतना) $= \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

P(B जीतना) = 1 – P(A जीतना) $= 1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$

टिप्पणी यदि $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$, जहाँ $|r| < 1$, तब इस अनंत श्रेणी का योग $\frac{a}{1-r}$.

(देखिए कक्षा XI की पाठ्यपुस्तक का A.1.3)

उदाहरण 24 यदि एक मशीन समुचित ढंग से स्थापित की जाती है तो यह 90% स्वीकार्य वस्तु उत्पादित करती है। यदि यह समुचित ढंग से स्थापित नहीं की जाती है तो यह मात्र 40% स्वीकार्य वस्तु बनाती है। पूर्व अनुभव यह दर्शाता है कि मशीन स्थापन 80% समुचित है। यदि एक निश्चित स्थापन के बाद मशीन 2 स्वीकार्य वस्तु उत्पादित करती है तो मशीन की समुचित ढंग से स्थापित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए A एक घटना है जिसमें एक मशीन दो स्वीकार्य वस्तुओं का उत्पादन करती है। साथ ही मान लीजिए B_1 सही कार्य प्रणाली की घटना को प्रदर्शित करता है और B_2 गलत कार्य प्रणाली की घटना को प्रदर्शित करता है।

अब $\quad P(B_1) = 0.8, P(B_2) = 0.2$

$$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9 \text{ और } P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$$

इसलिए
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

अध्याय 13 पर आधारित विविध प्रश्नावली

1. A और B इस प्रकार घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$. $P(B|A)$ ज्ञात कीजिए यदि
(i) A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है $\qquad$ (ii) $A \cap B = \phi$

2. एक दंपति के दो बच्चे हैं
(i) दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हैं कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है।
(ii) दोनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।

3. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफ़ेद हैं। एक सफ़ेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छिक चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता क्या है? यह मान लें कि पुरुषों और महिलाओं की संख्या समान है।

4. मान लीजिए कि 90% लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि 10 लोगों में से यादृच्छया चुने गए अधिक से अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हों?

5. यदि एक लीप वर्ष को यादृच्छया चुना गया हो तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उस वर्ष में 53 मंगलवार होंगे?

6. मान लीजिए हमारे पास A, B, C और D बक्से हैं जिसमें रखी संगमरमर की लाल, सफेद और काली टुकड़ियों का विवरण निम्न तरीके से है यादृच्छया एक बॉक्स चुना जाता है तथा इससे एक टुकड़ा निकाला जाता है। यदि टुकड़ा लाल हो तो इसे बॉक्स A; बॉक्स B, बॉक्स C से निकाले जाने की क्या प्रायिकता है?

बॉक्स	संगमरमर की टुकड़ियों का रंग		
	लाल	सफ़ेद	काला
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

7. मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है। यह मान लिया जाता है कि ध्यान ओर योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देता है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है। किसी भी समय रोगी इन दोनों में से किसी एक विकल्प का चयन करता है। यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रसित हो जाता है। रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

8. यदि 2 कोटि के एक सारणिक के सभी अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का धनात्मक मान होने की क्या प्रायिकता हैं। (मान लीजिए की सारणिक के प्रत्येक अवयव स्वतंत्र रूप से चुने जा सकते हैं तथा प्रत्येक की चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।)

9. एक इलेक्ट्रॉनिक एसेंबली के दो सहायक निकाय A और B हैं। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात है:

$$P(A \text{ के असफल होने की}) = 0.2$$
$$P(B \text{ के अकेले असफल होने की}) = 0.15$$
$$P(A \text{ और } B \text{ के असफल होने की}) = 0.15$$

तो, निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(i) P(A असफल/B असफल हो चुकी हो)

(ii) P(A के अकेले असफल होने की)

10. थैला 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें है तथा थैला II में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानांतरित किया जाता है और तब एक गेंद थैला 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानांतरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर का चुनाव कीजिए:

11. यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ है कि $P(A) \neq 0$ और $P(B/A) = 1$, तब

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

12. यदि $P(A/B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है।

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

13. यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि

$P(A) + P(B) - P(A$ और $B) = P(A)$, तब

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

सारांश

इस अध्याय के मुख्य बिंदु निम्न प्रकार से हैं

- घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि घटना F दी गई है, निम्न प्रकार से ज्ञात की जाती है

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \ P(F) \neq 0$$

- $0 \le P(E|F) \le 1$, $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

  $P(E \cup F|G) = P(E|G) + P(F|G) - P(E \cap F|G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E), P(E) \neq 0$

  या $P(E \cap F) = P(F)\ (E|F), P(F) \neq 0$

- यदि E और F स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो

  $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

  और $P(E|F) = P(E), P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F), P(E) \neq 0$

- संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय:

  मान लें $\{E_1, E_2, ...E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और $E_1, E_2, ...E_n$, में प्रत्येक की प्रायिकता शून्येत्तर है। साथ ही A प्रतिदर्श समष्टि से संबधित एक घटना है, तब

  $P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$

- **बेज़-प्रमेय:** यदि $E_1, E_2, ...E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1, E_2, ..., E_n$ युग्मत: असंयुक्त हैं और $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ और A एक शून्येतर प्रायिकता की घटना है तब

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

ऐतिहासिक नोट

एक पासे पर आधारित खेल में प्रायिकता (अवसर) के माप का पहला संदर्भ दाँते के दैवी प्रहसन पर एक व्याख्या में मिलता है। जेरनीमोंकॉरडन (1501-1576) ने जुए के खेल पर एक विस्तृत निबंध जिसका नाम 'लिबर डे लूडो अलकाए' लिखा था जो उनके मृत्योपरांत 1663 में प्रकाशित हुआ था। इस निबंध में उन्होंने दो पासों को उछालने पर प्रत्येक घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या के बारे में बताया है। गैलिलियो (1564-1642) ने तीन पासों के एक खेल में संयोग के माप के संबंध में आकस्मिक टिप्पणी की है। गैलिलियो ने विश्लेषण किया था कि जब तीन पासों को उछाला जाता है तो प्रकट संख्याओं के योग का 10 होना योग 9 से अधिक संभाव्य है क्योंकि योग को दस होने के अनुकूल परिणामों की संख्या योग 9 के अनुकूल परिणामों की संख्या से अधिक है।

इस प्रारंभिक योगदान के अतिरिक्त यह सामान्यतः माना जाता है कि प्रायिकता के विज्ञान का प्रमाणिक उद्गम सत्रहवीं शताब्दी के दो महान गणितज्ञों पॉस्कल (1623-1662) और पीअरे द् फ़र्मा (1601-1665) के मध्य हुए पत्र व्यवहार से हुआ है। एक फ्रांसिसी जुआरी शेवेलियर डे मेरे ने सैंद्धातिक तर्क और जुए में एकत्रित प्रेक्षणों में अंतर्विरोध की व्याख्या के लिए पॉस्कल से पूछा। इस प्रश्न के हल के लिए 1654 के इर्द-गिर्द पॉस्कल और फ़र्मा के बीच हुए पत्र व्यवहार की श्रृंखला में प्रायिकता के विज्ञान की प्रथम नींव रखी गई। पॉस्कल ने समस्या को बीजगणितीय रूप में हल किया जबकि फ़र्मा ने संचय की विधियों का उपयोग किया।

महान हालैंड निवासी वैज्ञानिक ह्यजेन (1629-1695) को पॉस्कल और फ़र्मा के मध्य हुए पत्र व्यवहार के बारे में जानकारी मिली तो उन्होंने प्रायिकता की प्रथम पुस्तक 'डे रेशियोसिनिस इन लूडो अलाय' को प्रकाशित किया जिसमें संयोग के खेल में प्रायिकता पर बहुत सारी रोचक लेकिन कठिन समस्याओं के हल प्रस्तुत किए। प्रायिकता सिद्धांत पर अगला महान कार्य जैकब बरनौली (1654-1705) ने एक पुस्तक 'आर्स कंजेकटेंडी' के रूप में किया जो उनके मृत्योपरांत उनके भतीजे निकॉलस बरनौली ने 1713 में प्रकाशित की थी। उन्हें एक महत्त्वपूर्ण प्रायिकता बंटन 'द्विपद बंटन' की खोज का श्रेय भी जाता है। प्रायिकता पर अगला आकर्षक कार्य 'अब्राहम डे मोवियर (1667-1754) की पुस्तक 'द डॉक्ट्रिन ऑफ चांस' में विद्यमान है जिसे 1718 में प्रकाशित किया गया था। थॉमस बेज़ (1702-1761) ने उनके नाम पर प्रसिद्ध प्रमेय 'बेज़-प्रमेय' को व्युत्पन्न करने के लिए सप्रतिबंध प्रायिकता का उपयोग किया। प्रसिद्ध खगोलशास्त्री 'पियरे साइमन डे लॉपलास (1749-1827) ने भी प्रायिकता सिद्धांत पर कार्य किया और 1812 में एक पुस्तक 'थियोरी एनॉलिटिक डेस प्रोबेबिलिटिज़' प्रकाशित की। इसके बाद रूसी गणितज्ञों शेबीशेव (1821-1894), मॉरकोव (1856-1922), ए. लियापोनोव (1821-1918) और ए.एन. कॉल्मोग्रोव (1903-1987) ने प्रायिकता सिद्धांत पर सार्थक योगदान दिया। कॉल्मोग्रोव ने प्रायिकता का समुच्चय फलन के रूप में सूत्रपात किया। जिसे 1933 में प्रकाशित पुस्तक 'प्रायिकता का आधारभूत सिद्धांत' में प्रायिकता के अभिगृहितीय दृष्टिकोण के नाम से जाना जाता है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$
7. $\frac{x^3}{3}-x+C$
8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$
9. $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$
10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$
11. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$
13. $\frac{x^3}{3}+x+C$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$
16. $x^2-3\sin x+e^x+C$
17. $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
18. $\tan x + \sec x + C$
19. $\tan x - x + C$
20. $2\tan x - 3\sec x + C$
21. C
22. A

प्रश्नावली 7.2

1. $\log(1+x^2)+C$
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$
3. $\log|1+\log x|+C$
4. $\cos(\cos x)+C$
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$
8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$
9. $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$
10. $2\log\left|\sqrt{x}-1\right|+C$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$ **13.** $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$ **15.** $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$ **16.** $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$ **18.** $e^{\tan^{-1}x}+C$ **19.** $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$ **23.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$ **25.** $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$ **27.** $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$ **28.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$ **30.** $-\log|1+\cos x|+C$ **31.** $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$ **33.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$ **35.** $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$ **36.** $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$ **38.** D

39. B

प्रश्नावली 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$ **2.** $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. $x-\sin x+C$

13. $2(\sin x+x\cos\alpha)+C$

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x-\text{cosec}\, x+C$

18. $\tan x+C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

20. $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A

24. B

प्रश्नावली 7.4

1. $\tan^{-1}x^3+C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

4. $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+C$

5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

6. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\ \frac{3x+1}{2}\ +C$

12. $\sin^{-1}\ \frac{x+3}{4}\ +C$

13. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\ \frac{2x-3}{\sqrt{41}}\ +C$

15. $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\frac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\ \frac{3x+1}{\sqrt{2}}\ +C$

19. $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\ \frac{x-2}{2}\ +C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B

25. B

प्रश्नावली 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x+2|-\frac{5}{x-2}+C$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

17. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

प्रश्नावली 7.6

1. $-x\cos x+\sin x+C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x-\frac{x^2}{4}+C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1}x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

9. $(2x^2-1)\frac{\cos^{-1}x}{4}-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

10. $\left(\sin^{-1}x\right)^2 x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x+C$

11. $-\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x+x\right]+C$

12. $x\tan x+\log|\cos x|+C$

13. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}+C$

15. $\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log x-\frac{x^3}{9}-x+C$

16. $e^x\sin x+C$

17. $\frac{e^x}{1+x}+C$

18. $e^x\tan\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{e^x}{x}+C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2}+C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$

22. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+C$

23. A

24. B

प्रश्नावली 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6}+\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

प्रश्नावली 7.8

1. 2

2. $\log\frac{3}{2}$

3. $\frac{64}{3}$

4. $\frac{1}{2}$

5. 0

6. $e^4(e-1)$

7. $\frac{1}{2}\log 2$

8. $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$

9. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{\pi}{4}$

11. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

12. $\frac{\pi}{4}$

13. $\frac{1}{2}\log 2$

14. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15. $\frac{1}{2}(e-1)$

16. $5-\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}-\log\frac{3}{2}\right)$

17. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$

18. 0

19. $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$

20. $1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

21. D

22. C

प्रश्नावली 7.9

1. $\frac{1}{2}\log 2$ 2. $\frac{64}{231}$ 3. $\frac{\pi}{2} - \log 2$

4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ 5. $\frac{\pi}{4}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7. $\frac{\pi}{8}$ 8. $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ 9. D

10. B

प्रश्नावली 7.10

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

5. 29 6. 9 7. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8. $\frac{\pi}{8}\log 2$ 9. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ 10. $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ 11. $\frac{\pi}{2}$

12. π 13. 0 14. 0 15. 0

16. $-\pi \log 2$ 17. $\frac{a}{2}$ 18. 5 20. C

21. C

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$ 2. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

3. $-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$ 4. $-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

5. $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$

6. $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+9)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$

7. $\sin a\log|\sin(x-a)|+x\cos a+C$ 8. $\frac{x^3}{3}+C$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$

10. $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

11. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

12. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

13. $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

14. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

15. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

16. $\frac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

17. $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

18. $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

19. $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

20. $e^x \tan x + C$

21. $-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

22. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

23. $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$

24. $e^{\frac{\pi}{2}}$

25. $\frac{\pi}{8}$

26. $\frac{\pi}{6}$

27. $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

28. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

29. $\frac{1}{40}\log 9$

30. $\frac{\pi}{2}-1$

31. $\frac{19}{2}$

32. A

33. B

34. D

प्रश्नावली 8.1

1. 12π **2.** 6π **3.** A **4.** B

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. 9 **3.** 4 **4.** D **5.** C

प्रश्नावली 9.1

1. कोटि 4; घात परिभाषित नहीं **2.** कोटि 1; घात 1

3. कोटि 2; घात 1 **4.** कोटि 2; घात परिभाषित नहीं

5. कोटि 2; घात 1 **6.** कोटि 3; घात 2

7. कोटि 3; घात 1 **8.** कोटि 1; घात 1

9. कोटि 2; घात 1 **10.** कोटि 2; घात 1

11. D **12.** A

प्रश्नावली 9.2

11. D **12.** D

प्रश्नावली 9.3

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$ **2.** $y = 2\sin(x + C)$

3. $y = 1 + Ae^{-x}$ **4.** $\tan x \tan y = C$

5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$ **6.** $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$

7. $y = e^{cx}$ **8.** $x^{-4} + y^{-4} = C$

9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ **10.** $\tan y = C(1 - e^x)$

11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$

12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$ **13.** $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$

14. $y = \sec x$ **15.** $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$ **17.** $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x+4)^2 = y+3$

19. $(63t+27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93%

21. Rs 1648

22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\dfrac{11}{10}\right)}$

23. A

प्रश्नावली 9.4

1. $(x-y)^2 = Cx\, e^{\frac{-y}{x}}$

2. $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$

4. $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x|+C$

6. $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$

8. $x\left[1-\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right] = C\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\dfrac{y}{x}-1$

10. $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11. $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2}+\log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$

13. $\cot\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

15. $y = \dfrac{2x}{1-\log|x|}\ (x\neq 0,\ x\neq e)$

16. C

17. D

प्रश्नावली 9.5

1. $y = \dfrac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\,e^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3. $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$

4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5. $y = (\tan x - 1) + C\,e^{-\tan x}$

6. $y = \dfrac{x^2}{16}(4\log|x|-1)+Cx^{-2}$

7. $y\log x = \dfrac{-2}{x}(1+\log|x|)+C$

8. $y = (1+x^2)^{-1}\ \log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$

9. $y=\frac{1}{x}-\cot x+\frac{C}{x\sin x}$

10. $(x + y + 1) = C\, e^y$

11. $x=\frac{y^2}{3}+\frac{C}{y}$

12. $x = 3y^2 + Cy$

13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

14. $y\,(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2\,e^x$

18. C

19. D

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) कोटि 2; घात 1 (ii) कोटि 1; घात 3

(iii) कोटि 4; घात परिभाषित नहीं

4. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$

6. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

7. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

8. $e^{\frac{x}{y}}=y+C$

9. $\log|x-y|=x+y+1$

10. $y e^{2\sqrt{x}}=(2\sqrt{x}+C)$

11. $y\sin x=2x^2-\frac{\pi^2}{2}\ (\sin x\neq 0)$

12. $y=\log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x\neq -1$

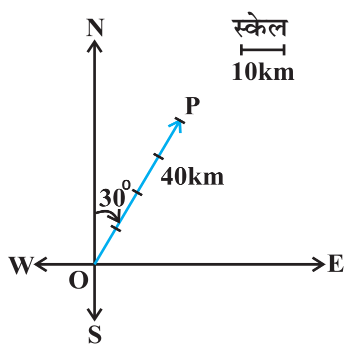
13. C

14. C

15. C

प्रश्नावली 10.1

1. संलग्न आकृति में, सदिश $\overrightarrow{OP}$ वांछित विस्थापन को निरूपित करता है।



2. (i) अदिश (ii) सदिश (iii) अदिश (iv) अदिश (v) अदिश
(vi) सदिश

3. (i) अदिश (ii) अदिश (iii) सदिश (iv) सदिश (v) अदिश

4. (i) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सह-अदिम हैं।
(ii) सदिश $\vec{b}$ और $\vec{d}$ समान है।
(iii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{c}$ संरेख है परंतु समान नहीं हैं।

5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

प्रश्नावली 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

2. संभावित उत्तरों की संख्या अनंत है।

3. संभावित उत्तरों की संख्या अनंत है।

4. $x = 2, y = 3$

5. -7 और 6; $-7\hat{i}$ और $6\hat{j}$

6. $-4\hat{j}-\hat{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$

12. $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

15. (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

16. $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

18. (C)

19. (B), (C), (D)

प्रश्नावली 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

3. 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$

6. $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

7. $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$

9. $\sqrt{13}$

10. 8

12. सदिश $\vec{b}$ कोई भी सदिश हो सकता है। **13.** $\dfrac{-3}{2}$

14. कोई भी दो ऋणेतर और परस्पर लंबवत् सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को लीजिए

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

प्रश्नावली 10.4

1. $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\dfrac{2}{3}\hat{i}\mp\dfrac{2}{3}\hat{j}\mp\dfrac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}$

5. $3, \dfrac{27}{2}$ **6.** या $|\vec{a}|=0$ या $|\vec{b}|=0$

8. नहीं; कोई भी शून्येतर संरेख सदिशों को लीजिए।

9. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\dfrac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\dfrac{-5}{2}\hat{i}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. नहीं; $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ को त्रिभुज की तीनों भुजाओं को निरूपित करते हुए लीजिए।

5. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$ **7.** $\dfrac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\dfrac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\dfrac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. $2:3$ **9.** $3\vec{a}+5\vec{b}$ **10.** $\dfrac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k});\ 11\sqrt{5}$

12. $\dfrac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$ **13.** $\lambda=1$ **16.** (B)

17. (D) **18.** (C) **19.** (B)

प्रश्नावली 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}$; $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$; $\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

प्रश्नावली 11.2

4. $r = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

5. $r = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और कार्तीय रूप $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ है।

6. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$

7. $r = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

8. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$, (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

9. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

10. $p = \frac{70}{11}$ **12.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **13.** $2\sqrt{29}$

14. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **15.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. 90° **2.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$

3. $k = \frac{-10}{7}$ **4.** 9

5. $\bar{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

प्रश्नावली 12.1

1. (0, 4) पर अधिकतम $Z = 16$
2. (4, 0) पर न्यूनतम $Z = -12$
3. $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर अधिकतम $Z = \frac{235}{19}$
4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर न्यूनतम $Z = 7$
5. (4, 3) पर अधिकतम $Z = 18$
6. (6, 0) और (0, 3) को मिलाने वाली रेखा खंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर न्यूनतम $Z = 6$.
7. (60, 0) पर न्यूनतम $Z = 300$;

   (120, 0) और (60, 30) को मिलाने वाली रेखा खंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर अधिकतम $Z = 600$;
8. (0, 50) और (20, 40) को मिलाने वाली रेखाखंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर न्यूनतम $Z = 100$.

   (0, 200) पर अधिकतम $Z = 400$
9. Z का कोई अधिकतम मान नहीं है।
10. चूँकि कोई सुसंगत क्षेत्र नहीं है अतः Z का अधिकतम मान नहीं है।

प्रश्नावली 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}, P(F|E) = \frac{1}{3}$
2. $P(A|B) = \frac{16}{25}$
3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98
4. $\frac{11}{26}$
5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$
6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$
7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ **9.** 1 **10.** (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ **15.** 0 **16.** C **17.** D

प्रश्नावली 13.2

1. $\frac{3}{25}$ **2.** $\frac{25}{102}$ **3.** $\frac{44}{91}$

4. A और B परस्पर स्वतंत्र हैं। **5.** A और B परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

6. E और F परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

7. (i) $p = \frac{1}{10}$ (ii) $p = \frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ **10.** A और B परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$ **13.** (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$ **15.** (i), (ii) **16.** (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

17. D **18.** B

प्रश्नावली 13.3

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{13}$ **4.** $\frac{12}{13}$

5. $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

9. $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

13. A **14.** C

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$ **4.** $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. $\frac{2}{7}$ **6.** $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$ **7.** $\frac{14}{29}$

8. $\frac{3}{16}$ **9.** (i) 0.5 (ii) 0.05 **10.** $\frac{16}{31}$

11. A **12.** C **13.** B