Ganit-12(Hindi)

Part-I

विषय-सूची

भाग - I

आमुख *iii*

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन *v*

प्रस्तावना *vii*

1. संबंध एवं फलन **1**

1.1 भूमिका 1
1.2 संबंधों के प्रकार 2
1.3 फलनों के प्रकार 8
1.4 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन 13

2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन **20**

2.1 भूमिका 20
2.2 आधारभूत संकल्पनाएँ 20
2.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म 30

3. आव्यूह **37**

3.1 भूमिका 37
3.2 आव्यूह 37
3.3 आव्यूहों के प्रकार 42
3.4 आव्यूहों पर संक्रियाएँ 46
3.5 आव्यूह का परिवर्त 66
3.6 सममित तथा विषम सममित आव्यूह 68
3.7 व्युत्क्रमणीय आव्यूह 73

4. सारणिक **79**

4.1 भूमिका 79
4.2 सारणिक 80
4.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल 86

4.4 उपसारणिक और सहखंड 88
4.5 आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम 91
4.6 सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोग 98

5. सांतत्य तथा अवकलनीयता 110

5.1 भूमिका 110
5.2 सांतत्य 110
5.3 अवकलनीयता 126
5.4 चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलन 134
5.5 लघुगणकीय अवकलन 139
5.6 फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज 143
5.7 द्वितीय कोटि का अवकलज 146

6. अवकलज के अनुप्रयोग 156

6.1 भूमिका 156
6.2 राशियों के परिवर्तन की दर 156
6.3 वर्धमान और ह्रासमान फलन 161
6.4 उच्चतम और निम्नतम 169

परिशिष्ट1: गणित में उपपत्तियाँ 197

A.1.1 भूमिका 197
A.1.2 उपपत्ति क्या है? 197

परिशिष्ट 2: गणितीय निदर्शन 206

A.2.1 भूमिका 206
A.2.2 गणितीय निदर्शन क्यों? 206
A.2.3 गणितीय निदर्शन के सिद्धांत 207

***उत्तरमाला* 218**

***पूरक पाठ्य सामग्री* 232**

अध्याय 1

संबंध एवं फलन (Relations and Functions)

12081CH01

❖There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. Hardy ❖

1.1 भूमिका (Introduction)

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

स्मरण कीजिए कि कक्षा XI में, संबंध एवं फलन, प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर आदि की अवधारणाओं का, विभिन्न प्रकार के वास्तविक मानीय फलनों और उनके आलेखों सहित परिचय कराया जा चुका है। गणित में शब्द 'संबंध (Relation)' की सकंल्पना को अंग्रेज़ी भाषा में इस शब्द के अर्थ से लिया गया है, जिसके अनुसार दो वस्तुएँ परस्पर संबंधित होती है, यदि उनके बीच एक अभिज्ञेय (Recognisable) कड़ी हो। मान लीजिए कि A, किसी स्कूल की कक्षा XII के विद्यार्थियों का समुच्चय है तथा B उसी स्कूल की कक्षा XI के विद्यार्थियों का समुच्चय हैं। अब समुच्चय A से समुच्चय B तक के संबंधों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b का भाई है$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b की बहन है$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a की आयु b की आयु से अधिक है$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: पिछली अंतिम परीक्षा में a द्वारा प्राप्त पूर्णांक b द्वारा प्राप्त पूर्णांक से कम है$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a उसी जगह रहता है जहाँ b रहता है$\}$.

तथापि A से B तक के किसी संबंध R को अमूर्तरूप (Abstracting) से हम गणित में $A \times B$ के एक स्वेच्छ (Arbitrary) उपसमुच्चय की तरह परिभाषित करते हैं।

यदि $(a, b) \in R$, तो हम कहते हैं कि संबंध R के अंतर्गत a, b से संबंधित है और हम इसे a R b लिखते हैं। सामान्यत:, यदि $(a, b) \in R$, तो हम इस बात की चिंता नहीं करते हैं कि a तथा b के बीच कोई अभिज्ञेय कड़ी है अथवा नहीं है। जैसा कि कक्षा XI में देख चुके हैं, फलन एक विशेष प्रकार के संबंध होता हैं।

इस अध्याय में, हम विभिन्न प्रकार के संबंधों एवं फलनों, फलनों के संयोजन (composition), व्युत्क्रमणीय (Invertible) फलनों और द्विआधारी संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

1.2 संबंधों के प्रकार (Types of Relations)

इस अनुच्छेद में हम विभिन्न प्रकार के संबंधों का अध्ययन करेंगे। हमें ज्ञात है कि किसी समुच्चय A में संबंध, A × A का एक उपसमुच्चय होता है। अत: रिक्त समुच्चय $\phi \subset A \times A$ तथा $A \times A$ स्वयं, दो अन्त्य संबंध हैं। स्पष्टीकरण हेतु, $R = \{(a, b): a - b = 10\}$ द्वारा प्रदत्त समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित एक संबंध R पर विचार कीजिए। यह एक रिक्त समुच्चय है, क्योंकि ऐसा कोई भी युग्म (pair) नहीं है जो प्रतिबंध $a - b = 10$ को संतुष्ट करता है। इसी प्रकार $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$, संपूर्ण समुच्चय $A \times A$ के तुल्य है, क्योंकि $A \times A$ के सभी युग्म $(a, b), |a - b| \geq 0$ को संतुष्ट करते हैं। यह दोनों अन्त्य के उदाहरण हमें निम्नलिखित परिभाषाओं के लिए प्रेरित करते हैं।

परिभाषा 1 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक **रिक्त संबंध** कहलाता है, यदि A का कोई भी अवयव A के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, अर्थात् $R = \phi \subset A \times A$.

परिभाषा 2 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R, एक **सार्वत्रिक (universal) संबंध** कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयवों से संबंधित है, अर्थात् $R = A \times A$.

रिक्त संबंध तथा सार्वत्रिक संबंध को कभी-कभी तुच्छ (trivial) संबंध भी कहते हैं।

उदाहरण 1 मान लीजिए कि A किसी बालकों के स्कूल के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है। दर्शाइए कि $R = \{(a, b) : a, b$ की बहन है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक रिक्त संबंध है तथा $R' = \{(a, b) :$ a तथा b की ऊँचाईयों का अंतर 3 मीटर से कम है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक सार्वत्रिक संबंध है।

हल प्रश्नानुसार, क्योंकि स्कूल बालकों का है, अतएव स्कूल का कोई भी विद्यार्थी, स्कूल के किसी भी विद्यार्थी की बहन नहीं हो सकता है। अत: $R = \phi$, जिससे प्रदर्शित होता है कि R रिक्त संबंध है। यह भी स्पष्ट है कि किन्हीं भी दो विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का अंतर 3 मीटर से कम होना ही चाहिए। इससे प्रकट होता है कि $R' = A \times A$ सार्वत्रिक संबंध है।

टिप्पणी कक्षा XI में विद्यार्थीगण सीख चुके हैं कि किसी संबंध को दो प्रकार से निरूपित किया जा सकता है, नामत: रोस्टर विधि तथा समुच्चय निर्माण विधि। तथापि बहुत से लेखकों द्वारा समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ को a R b द्वारा भी निरूपित किया जाता है, यदि और केवल यदि $b = a + 1$ हो। जब कभी सुविधाजनक होगा, हम भी इस संकेतन (notation) का प्रयोग करेंगे।

यदि $(a, b) \in$ R, तो हम कहते हैं कि a,b से संबंधित है' और इस बात को हम a R b द्वारा प्रकट करते हैं।

एक अत्यन्त महत्वपूर्ण संबंध, जिसकी गणित में एक सार्थक (significant) भूमिका है, तुल्यता संबंध (Equivalence Relation) कहलाता है। तुल्यता संबंध का अध्ययन करने के लिए हम पहले तीन प्रकार के संबंधों, नामतः स्वतुल्य (Reflexive), सममित (Symmetric) तथा संक्रामक (Transitive) संबंधों पर विचार करते हैं।

परिभाषा 3 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R;

(i) स्वतुल्य **(reflexive)** कहलाता है, यदि प्रत्येक $a \in$ A के लिए $(a, a) \in$ R,

(ii) सममित **(symmetric)** कहलाता है, यदि समस्त $a_1, a_2 \in$ A के लिए $(a_1, a_2) \in$ R से $(a_2, a_1) \in$ R प्राप्त हो।

(iii) संक्रामक **(transitive)** कहलाता है, यदि समस्त, $a_1, a_2, a_3 \in$ A के लिए $(a_1, a_2) \in$ R तथा $(a_2, a_3) \in$ R से $(a_1, a_3) \in$ R प्राप्त हो।

परिभाषा 4 A पर परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध कहलाता है, यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 2 मान लीजिए कि T किसी समतल में स्थित समस्त त्रिभुजों का एक समुच्चय है। समुच्चय T में $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के सर्वांगसम है$\}$ एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

हल संबंध R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम होता है। पुनः $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ के सर्वांगसम है $\Rightarrow T_2, T_1$ के सर्वांगसम है $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$. अतः संबंध R सममित है। इसके अतिरिक्त $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ के सर्वांगसम है तथा T_2, T_3 के सर्वांगसम है $\Rightarrow T_1, T_3$ के सर्वांगसम है $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$. अतः संबंध R संक्रामक है। इस प्रकार R एक तुल्यता संबंध है।

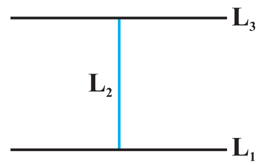
उदाहरण 3 मान लीजिए कि L किसी समतल में स्थित समस्त रेखाओं का एक समुच्चय है तथा $R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2$ पर लंब है$\}$ समुच्चय L में परिभाषित एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R सममित है किंतु यह न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

हल R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि कोई रेखा L_1 अपने आप पर लंब नहीं हो सकती है, अर्थात् $(L_1, L_1) \notin R$. R सममित है, क्योंकि $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 पर लंब है

$\Rightarrow$ L_2, L_1 पर लंब है

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$



आकृति 1.1

R संक्रामक नहीं है। निश्चय ही, यदि L_1, L_2 पर लंब है तथा L_2, L_3 पर लंब है, तो L_1, L_3 पर कभी भी लंब नहीं हो सकती है। वास्तव में ऐसी दशा में L_1, L_3 के समान्तर होगी। अर्थात्, $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ परंतु $(L_1, L_3) \notin R$

उदाहरण 4 सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परंतु न तो सममित है और न संक्रामक है।

हल R स्वतुल्य है क्योंकि (1, 1), (2, 2) और (3, 3), R के अवयव हैं। R सममित नहीं है, क्योंकि $(1, 2) \in R$ किंतु $(2, 1) \notin R$. इसी प्रकार R संक्रामक नहीं है, क्योंकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 3) \in R$ परंतु $(1, 3) \notin R$

उदाहरण 5 सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(a, b) :$ संख्या 2, $(a - b)$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है।

हल R स्वतुल्य है, क्योंकि समस्त $a \in \mathbf{Z}$ के लिए 2, $(a - a)$ को विभाजित करता है। अतः $(a, a) \in R$. पुनः, यदि $(a, b) \in R$, तो 2, $a - b$ को विभाजित करता है । अतएव $b - a$ को भी 2 विभाजित करता है। अतः $(b, a) \in R$, जिससे सिद्ध होता है कि R सममित है। इसी प्रकार, यदि $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$, तो $a - b$ तथा $b - c$ संख्या 2 से भाज्य है। अब, $a - c = (a - b) + (b - c)$ सम (even) है (क्यों?)। अतः $(a - c)$ भी 2 से भाज्य है। इससे सिद्ध होता है कि R संक्रामक है। अतः समुच्चय **Z** में R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 5 में, नोट कीजिए कि सभी सम पूर्णांक शून्य से संबंधित हैं, क्योंकि $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$, ...आदि R में हैं और कोई भी विषम पूर्णांक 0 से संबंधित नहीं है, क्योंकि $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 3)$, ...आदि R में नहीं हैं। इसी प्रकार सभी विषम पूर्णांक 1 से संबंधित हैं और कोई भी सम पूर्णांक 1 से संबंधित नहीं है। अतएव, समस्त सम पूर्णांकों का समुच्चय E तथा समस्त विषम पूर्णांकों का समुच्चय O समुच्चय Z के उप समुच्चय हैं, जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

(i) E के समस्त अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं तथा O के समस्त अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं।

(ii) E का कोई भी अवयव O के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है और विलोमतः O का कोई भी अवयव E के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।

(iii) E तथा O असंयुक्त है और $\mathbf{Z} = E \cup O$ है।

उपसमुच्चय E, शून्य को अंतर्विष्ट (contain) करने वाला तुल्यता-वर्ग (Equivalence Class) कहलाता है और जिसे प्रतीक [0] से निरूपित करते हैं। इसी प्रकार O, 1 को अंतर्विष्ट करने वाला तुल्यता-वर्ग है, जिसे [1] द्वारा निरूपित करते हैं। नोट कीजिए कि $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ और

$[1] = [2r + 1], r \in \mathbf{Z}$. वास्तव में, जो कुछ हमने ऊपर देखा है, वह किसी भी समुच्चय X में एक स्वेच्छ तुल्यता संबंध R के लिए सत्य होता है। किसी प्रदत्त स्वेच्छ समुच्चय X में प्रदत्त एक स्वेच्छ (arbitrary) तुल्यता संबंध R, X को परस्पर असंयुक्त उपसमुच्चयों A_i में विभाजित कर देता है, जिन्हें X का विभाजन (Partition) कहते हैं ओर जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं:

(i) समस्त i के लिए A_i के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित होते हैं।

(ii) A_i का कोई भी अवयव, A_j के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं होता है, जहाँ $i \neq j$

(iii) $\cup A_j = X$ तथा $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

उपसमुच्चय A_i तुल्यता-वर्ग कहलाते हैं। इस स्थिति का रोचक पक्ष यह है कि हम विपरीत क्रिया भी कर सकते हैं। उदाहरण के लिए **Z** के उन उपविभाजनों पर विचार कीजिए, जो **Z** के ऐसे तीन परस्पर असंयुक्त उपसमुच्चयों A_1, A_2 तथा A_3 द्वारा प्रदत्त हैं, जिनका सम्मिलन (Union) **Z** है,

$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ संख्या 3 का गुणज है $\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 1$ संख्या 3 का गुणज है $\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 2$ संख्या 3 का गुणज है $\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

Z में एक संबंध $R = \{(a, b) : 3, a - b$ को विभाजित करता है$\}$ परिभाषित कीजिए। उदाहरण 5 में प्रयुक्त तर्क के अनुसार हम सिद्ध कर सकते हैं कि R एक तुल्यता संबंध हैं। इसके अतिरिक्त A_1, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय के बराबर है, जो शून्य से संबंधित हैं, A_2, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय के बराबर है, जो 1 से संबंधित हैं और A_3, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय बराबर है, जो 2 से संबंधित हैं। अतः $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ और $A_3 = [2]$. वास्तव में $A_1 = [3r]$, $A_2 = [3r + 1]$ और $A_3 = [3r + 2]$, जहाँ $r \in \mathbf{Z}$.

उदाहरण 6 मान लीजिए कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ में $R = \{(a, b) : a$ तथा b दोनों ही या तो विषम हैं या सम हैं$\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। साथ ही सिद्ध कीजिए कि उपसमुच्चय $\{1, 3, 5, 7\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, और उपसमुच्चय $\{2, 4, 6\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, परंतु उपसमुच्चय $\{1, 3, 5,7\}$ का कोई भी अवयव उपसमुच्चय $\{2, 4, 6\}$ के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।

हल A का प्रदत्त कोई अवयव a या तो विषम है या सम है, अतएव $(a, a) \in R$. इसके अतिरिक्त $(a, b) \in R \Rightarrow a$ तथा b दोनों ही, या तो विषम हैं या सम हैं $\Rightarrow (b, a) \in R$. इसी प्रकार $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow$ अवयव a, b, c, सभी या तो विषम हैं या सम हैं $\Rightarrow (a, c) \in R$. अतः R एक तुल्यता संबंध है। पुनः, $\{1, 3, 5, 7\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं, क्योंकि इस उपसमुच्चय के सभी अवयव विषम हैं। इसी प्रकार $\{2, 4, 6,\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं, क्योंकि ये सभी सम हैं। साथ ही उपसमुच्चय $\{1, 3, 5, 7\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4, 6\}$ के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं हो सकता है, क्योंकि $\{1, 3, 5, 7\}$ के अवयव विषम हैं, जब कि $\{2, 4, 6\}$, के अवयव सम हैं।

प्रश्नावली 1.1

1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि
$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x , y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$

2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

4. सिद्ध कीजिए कि **R** में $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

5. जाँच कीजिए कि क्या **R** में $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

6. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

7. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

8. सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

9. सिद्ध किजिए कि समुच्चय $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है:

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है$\}$,

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$,

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

10. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो। .

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

11. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \ne (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

12. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4, और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

14. मान लीजिए कि XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2)$: L_1 समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

15. मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(C) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(D) R एक तुल्यता संबंध है।

16. मान लीजिए कि समुच्चय **N** में, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 फलनों के प्रकार (Types of Functions)

फलनों की अवधारणा, कुछ विशेष फलन जैसे तत्समक फलन, अचर फलन, बहुपद फलन, परिमेय फलन, मापांक फलन, चिह्न फलन आदि का वर्णन उनके आलेखों सहित कक्षा XI में किया जा चुका है।

दो फलनों के योग, अंतर, गुणा तथा भाग का भी अध्ययन किया जा चुका है। क्योंकि फलन की संकल्पना गणित तथा अध्ययन की अन्य शाखाओं (Disciplines) में सर्वाधिक महत्वपूर्ण है, इसलिए हम फलन के बारे में अपना अध्ययन वहाँ से आगे बढ़ाना चाहते हैं, जहाँ इसे पहले समाप्त किया था। इस अनुच्छेद में, हम विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करेंगे।

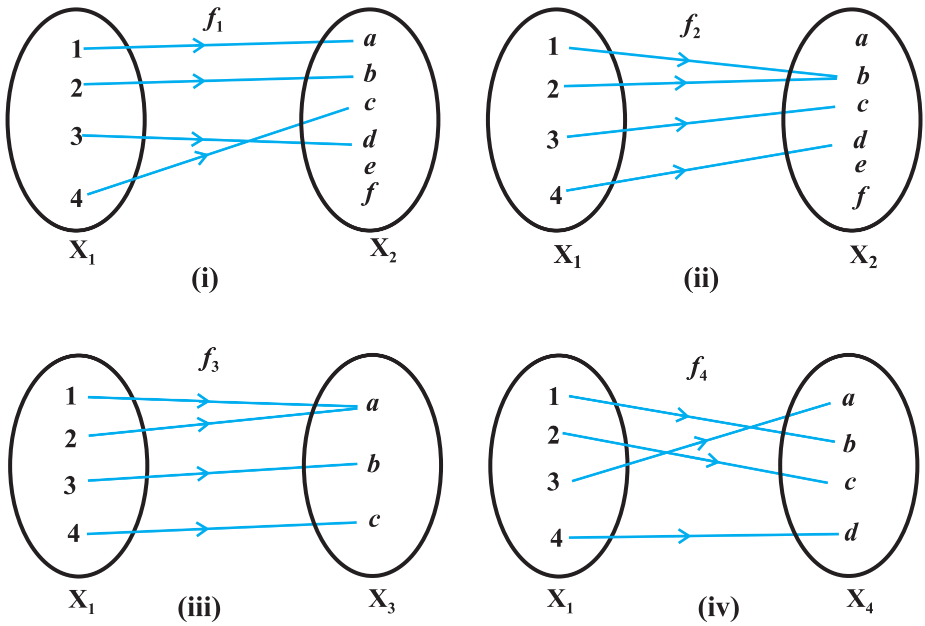
निम्नलिखित आकृतियों द्वारा दर्शाए गए फलन f_1, f_2, f_3 तथा f_4 पर विचार कीजिए।

आकृति 1.2 में हम देखते हैं कि X_1 के भिन्न (distinct) अवयवों के, फलन f_1 के अंतर्गत, प्रतिबिंब भी भिन्न हैं, किंतु f_2 के अंतर्गत दो भिन्न अवयवों 1 तथा 2 के प्रतिबिंब एक ही हैं नामत: b है। पुन: X_2 में कुछ ऐसे अवयव है जैसे e तथा f जो f_1 के अंतर्गत X_1 के किसी भी अवयव के प्रतिबिंब नहीं हैं, जबकि f_3 के अंतर्गत X_3 के सभी अवयव X_1 के किसी न किसी अवयव के प्रतिबिंब हैं।

उपर्युक्त परिचर्चा से हमें निम्नलिखित परिभाषाएँ प्राप्त होती हैं।

परिभाषा 5 एक फलन $f : X \rightarrow Y$ एकैकी (one-one) अथवा एकैक (injective) फलन कहलाता है, यदि f के अंतर्गत X के भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न होते हैं, अर्थात् प्रत्येक $x_1, x_2 \in X$, के लिए $f(x_1) = f(x_2)$ का तात्पर्य है कि $x_1 = x_2$, अन्यथा f एक बहुएक (many-one) फलन कहलाता है।

आकृति 1.2 (i) में फलन f_1 एकैकी फलन है तथा आकृति 1.2 (ii) में f_2 एक बहुएक फलन है।



आकृति 1.2

परिभाषा 6 फलन $f: X \to Y$ आच्छादक (onto) अथवा आच्छादी (surjective) कहलाता है, यदि f के अंतर्गत Y का प्रत्येक अवयव, X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब होता है, अर्थात् प्रत्येक $y \in Y$, के लिए, X में एक ऐसे अवयव x का अस्तित्व है कि $f(x) = y$.

आकृति 1.2 (iii) में, फलन f_3 आच्छादक है तथा आकृति 1.2 (i) में, फलन f_1 आच्छादक नहीं है, क्योंकि X_2 के अवयव e, तथा f, f_1 के अंतर्गत X_1 के किसी भी अवयव के प्रतिबिंब नहीं हैं।

टिप्पणी $f: X \to Y$ एक आच्छादक फलन है, यदि और केवल यदि f का परिसर (range) = Y.

परिभाषा 7 एक फलन $f: X \to Y$ एक एकैकी तथा आच्छादक (one-one and onto) अथवा एकैकी आच्छादी **(bijective)** फलन कहलाता है, यदि f एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही होता है।

आकृति 1.2 (iv) में, फलन f_4 एक एकैकी तथा आच्छादी फलन है।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि कक्षा X के सभी 50 विद्यार्थियों का समुच्चय A है। मान लीजिए $f: A \to \mathbf{N}$, $f(x)$ = विद्यार्थी x का रोल नंबर, द्वारा परिभाषित एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

हल कक्षा के दो भिन्न-भिन्न विद्यार्थियों के रोल नंबर समान नहीं हो सकते हैं। अतएव f एकैकी है। व्यापकता की बिना क्षति किए हम मान सकते हैं कि विद्यार्थियों के रोल नंबर 1 से 50 तक हैं। इसका

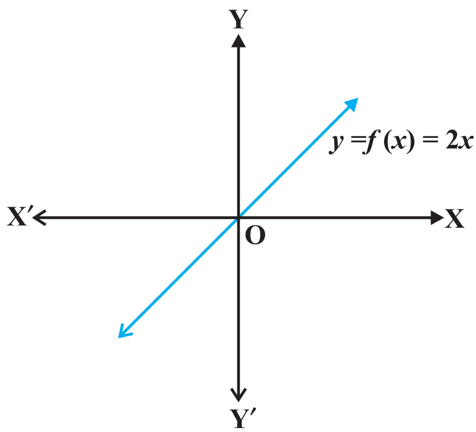
तात्पर्य यह हुआ कि **N** का अवयव 51, कक्षा के किसी भी विद्यार्थी का रोल नंबर नहीं है, अतएव f के अंतर्गत 51, A के किसी भी अवयव का प्रतिबिंब नहीं है। अत: f आच्छादक नहीं है।

उदाहरण 8 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

हल फलन f एकैकी है, क्योंकि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. पुन:, f आच्छदक नहीं है, क्योंकि $1 \in \mathbf{N}$, के लिए **N** में ऐसे किसी x का अस्तित्व नहीं है ताकि $f(x) = 2x = 1$ हो।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, एकैकी तथा आच्छादक है।

हल f एकैकी है, क्योंकि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. साथ ही, **R** में प्रदत्त किसी भी वास्तविक संख्या y के लिए **R** में $\frac{y}{2}$ का अस्तित्व है, जहाँ $f(\frac{y}{2}) = 2 \,.\, (\frac{y}{2}) = y$ है। अत: f आच्छादक भी है।



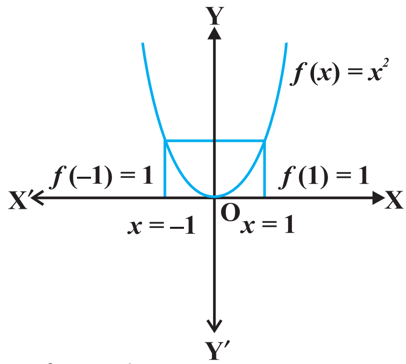
आकृति 1.3

उदाहरण 10 सिद्ध किजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, आच्छादक तो है किंतु एकैकी नहीं है।

हल f एकैकी नहीं है, क्योंकि $f(1) = f(2) = 1$, परंतु f आच्छादक है, क्योंकि किसी प्रदत्त $y \in \mathbf{N}, y \neq 1$, के लिए, हम x को $y + 1$ चुन लेते हैं, ताकि $f(y + 1) = y + 1 - 1 = y$ साथ ही $1 \in \mathbf{N}$ के लिए $f(1) = 1$ है।

उदाहरण 11 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल क्योंकि $f(-1) = 1 = f(1)$, इसलिए f एकैकी नहीं है। पुन: सहप्रांत **R** का अवयव -2, प्रांत **R** के किसी भी अवयव x का प्रतिबिंब नहीं है (क्यों?)। अत: f आच्छादक नहीं है।



f के अंतर्गत 1 तथा –1 का प्रतिबिंब है।

आकृति 1.4

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि नीचे परिभाषित फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही है

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1, \text{ यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$$

हल मान लीजिए $f(x_1) = f(x_2)$ है। नोट कीजिए कि यदि x_1 विषम है तथा x_2 सम है, तो $x_1 + 1 = x_2 - 1$, अर्थात् $x_2 - x_1 = 2$ जो असम्भव है। इस प्रकार x_1 के सम तथा x_2 के विषम होने की भी संभावना नहीं है। इसलिए x_1 तथा x_2 दोनों ही या तो विषम होंगे या सम होंगे। मान लीजिए कि x_1 तथा x_2 दोनों विषम हैं, तो $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. इसी प्रकार यदि x_1 तथा x_2 दोनों सम हैं, तो भी $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. अत: f एकैकी है। साथ ही सहप्रांत **N** की कोई भी विषम संख्या $2r + 1$, प्रांत **N** की संख्या $2r + 2$ का प्रतिबिंब है और सहप्रांत **N** की कोई भी सम संख्या $2r$, **N** की संख्या $2r - 1$ का प्रतिबिंब है। अत: f आच्छादक है।

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि आच्छादक फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ सदैव एकैकी फलन होता है।

हल मान लीजिए कि f एकैकी नहीं है। अत: इसके प्रांत में कम से कम दो अवयव मान लिया कि 1 तथा 2 का अस्तित्व है जिनके सहप्रांत में प्रतिबिंब समान है। साथ ही f के अंतर्गत 3 का प्रतिबिंब केवल एक ही अवयव है। अत:, परिसर में, सहप्रांत $\{1, 2, 3\}$ के, अधिकतम दो ही अवयव हो सकते हैं, जिससे प्रकट होता है कि f आच्छादक नहीं है, जो कि एक विरोधोक्ति है। अत: f को एकैकी होना ही चाहिए।

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ अनिवार्य रूप से आच्छादक भी है।

हल चूँकि f एकैकी है, इसलिए $\{1, 2, 3\}$ के तीन अवयव f के अंतर्गत सहप्रांत $\{1, 2, 3\}$ के तीन अलग-अलग अवयवों से क्रमश: संबंधित होंगे। अत: f आच्छादक भी है।

टिप्पणी उदाहरण 13 तथा 14 में प्राप्त परिणाम किसी भी स्वेच्छ परिमित (finite) समुच्चय X, के लिए सत्य है, अर्थात् एक एकैकी फलन $f: X \to X$ अनिवार्यत: आच्छादक होता है तथा प्रत्येक परिमित समुच्चय X के लिए एक आच्छादक फलन $f: X \to X$ अनिवार्यत: एकैकी होता है। इसके

विपरीत उदाहरण 8 तथा 10 से स्पष्ट होता है कि किसी अपरिमित (Infinite) समुच्चय के लिए यह सही नहीं भी हो सकता है। वास्तव में यह परिमित तथा अपरिमित समुच्चयों के बीच एक अभिलक्षणिक (characteristic) अंतर है।

प्रश्नावली 1.2

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ $\mathbf{R}_*$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत $\mathbf{R}_*$ को $\mathbf{N}$ से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत $\mathbf{R}_*$ ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?
2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:
   (i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।
   (ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।
   (iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन है।
   (iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।
   (v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।
3. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।
4. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$, यदि x ऋण है।
5. सिद्ध कीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x > 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ -1, \text{ यदि } x < 0, \end{cases}$$

   द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।
6. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बतलाइए कि क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

8. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f: A \times B \to B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादी (bijective) फलन है।

9. मान लीजिए कि समस्त $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ है। बतलाइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

10. मान लीजिए कि $A = \mathbf{R} - \{3\}$ तथा $B = \mathbf{R} - \{1\}$ हैं। $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

11. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

(A) f एकैकी आच्छादक है (B) f बहुएक आच्छादक है

(C) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है (D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

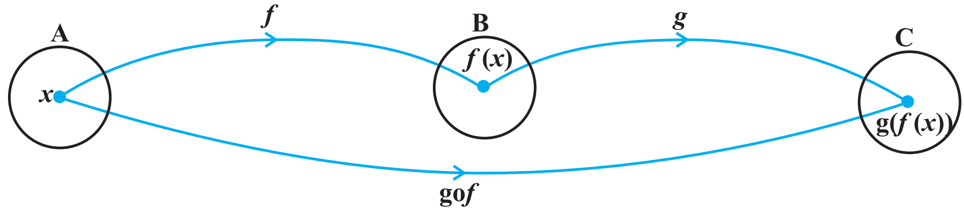
12. मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। सही उत्तर चुनिए:

(A) f एकैकी आच्छादक है (B) f बहुएक आच्छादक है

(C) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है (D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

1.4 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन (Composition of Functions and Invertible Function)

परिभाषा 8 मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हैं। तब f और g का संयोजन, gof द्वारा निरूपित होता है, तथा फलन $gof: A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ द्वारा परिभाषित होता है।



आकृति 1.5

उदाहरण 15 मान लीजिए कि $f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ और $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ दो फलन इस प्रकार हैं कि $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ और $g(3) = g(4) = 7$ तथा $g(5) = g(9) = 11$, तो gof ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ और $gof(5) = g(5) = 11$.

उदाहरण 16 यदि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो gof और fog ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए $gof \neq fog$.

हल यहाँ $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$. इसी प्रकार, $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ हैं। नोट कीजिए कि $x = 0$ के लिए $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ है। अत: $gof \neq fog$.

उपर्युक्त परिचर्चा, उदाहरण 22 तथा टिप्पणी निम्नलिखित परिभाषा के लिए प्रेरित करते हैं:

परिभाषा 9 फलन $f: X \to Y$ **व्युत्क्रमणीय (Invertible)** कहलाता है, यदि एक फलन $g: Y \to X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $gof = I_X$ तथा $fog = I_Y$ है। फलन g को फलन f का प्रतिलोम (Inverse) कहते हैं और इसे प्रतीक f^{-1} द्वारा प्रकट करते हैं।

अत:, यदि f व्युत्क्रमणीय है, तो f अनिवार्यत: एकैकी तथा आच्छादक होता है और विलोमत:, यदि f एकैकी तथा आच्छादक है, तो f अनिवार्यत: व्युत्क्रमणीय होता है। यह तथ्य, f को एकैकी तथा आच्छादक सिद्ध करके, व्युत्क्रमणीय प्रमाणित करने में महत्वपूर्ण रूप से सहायक होता है, विशेष रूप से जब f का प्रतिलोम वास्तव में ज्ञात नहीं करना हो।

उदाहरण 17 मान लीजिए कि $f: \mathbf{N} \to Y$, $f(x) = 4x + 3$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ $Y = \{y \in \mathbf{N}: y = 4x + 3$ किसी $x \in \mathbf{N}$ के लिए$\}$। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

हल Y के किसी स्वेच्छ अवयव y पर विचार कीजिए। Y, की परिभाषा द्वारा, प्रांत **N** के किसी अवयव x के लिए $y = 4x + 3$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $x = \frac{(y-3)}{4}$ है। अब $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ द्वारा

$g: Y \to \mathbf{N}$ को परिभाषित कीजिए। इस प्रकार $gof(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \frac{(4x+3-3)}{4} = x$ तथा $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$ है। इससे स्पष्ट होता है कि $gof = I_N$ तथा $fog = I_Y$, जिसका तात्पर्य यह हुआ कि f व्युत्क्रमणीय है और फलन g फलन f का प्रतिलोम है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 18 यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध है।

हल क्योंकि R_1 तथा R_2 तुल्यता संबंध है इसलिए $(a, a) \in R_1$, तथा $(a, a) \in R_2$, $\forall a \in A$ इसका तात्पर्य है कि $(a, a) \in R_1 \cap R_2, \forall a$, जिससे सिद्ध होता है कि $R_1 \cap R_2$ स्वतुल्य है। पुनः $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ तथा $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ तथा $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$, अतः $R_1 \cap R_2$ सममित है। इसी प्रकार $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ तथा $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ तथा $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$. इससे सिद्ध होता है कि $R_1 \cap R_2$ संक्रामक है। अतः $R_1 \cap R_2$ एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि समुच्चय A में धन पूर्णांकों के क्रमित युग्मों (ordered pairs) का एक संबंध R, (x, y) R (u, v), यदि और केवल यदि, $xv = yu$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

हल स्पष्टतया (x, y) R (x, y), $\forall (x, y) \in A$, क्योंकि $xy = yx$ है। इससे स्पष्ट होता है कि R स्वतुल्य है। पुनः (x, y) R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ और इसलिए (u, v) R (x, y)है। इससे स्पष्ट होता है कि R सममित है। इसी प्रकार (x, y) R (u, v) तथा (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ तथा $ub = va \Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ और इसलिए (x, y) R (a, b)है। अतएव R संक्रामक है। अतः R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 20 मान लीजिए कि X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}है। मान लीजिए कि X में $R_1 = \{(x, y) : x - y$ संख्या 3 से भाज्य है$\}$ द्वारा प्रदत्त एक संबंध R_1 है तथा $R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{(x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ द्वारा प्रदत्त X में एक अन्य संबंध R_2 है। सिद्ध कीजिए कि $R_1 = R_2$है।

हल नोट कीजिए कि {1, 4, 7}, {2, 5, 8} तथा {3, 6, 9} समुच्चयों में से प्रत्येक का अभिलक्षण (characterstic) यह है कि इनके किसी भी दो अवयवों का अंतर 3 का एक गुणज है। इसलिए $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$ संख्या 3 का गुणज है $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$, अतः $R_1 \subset R_2$. इसी प्रकार $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$ संख्या 3 से भाज्य है $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$. इससे स्पष्ट होता है कि $R_2 \subset R_1$. अतः $R_1 = R_2$ है।

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f : X \rightarrow Y$ एक फलन है। X में $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ द्वारा प्रदत्त एक संबंध R परिभाषित कीजिए। जाँचिए कि क्या R एक तुल्यता संबंध है।

हल प्रत्येक $a \in X$ के लिए $(a, a) \in R$, क्योंकि $f(a) = f(a)$, जिससे स्पष्ट होता है कि R स्वतुल्य है। इसी प्रकार, $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$. इसलिए R सममित है। पुनः $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ तथा $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$, जिसका तात्पर्य है कि R संक्रामक है। अतः R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 22 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल {1, 2, 3} से स्वयं तक एकैकी फलन केवल तीन प्रतीकों 1, 2, 3 का क्रमचय है। अतः {1, 2, 3} से स्वयं तक के प्रतिचित्रों (Maps) की कुल संख्या तीन प्रतीकों 1, 2 , 3 के क्रमचयों की कुल संख्या के बराबर होगी, जो कि $3! = 6$ है।

उदाहरण 23 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$ है। तब सिद्ध कीजिए कि ऐसे संबंधों की संख्या चार है, जिनमें (1, 2) तथा (2, 3) हैं और जो स्वतुल्य तथा संक्रामक तो हैं किंतु सममित नहीं हैं।

हल {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)}, (1, 2) तथा (2, 3) अवयवों वाला वह सबसे छोटा संबंध R_1 है, जो स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है। अब यदि R_1 में युग्म (2, 1) बढ़ा दें, तो प्राप्त संबंध R_2 अब भी स्वतुल्य तथा संक्रामक है परंतु सममित नहीं है। इसी प्रकार, हम R_1 में (3, 2) बढ़ा कर R_3 प्राप्त कर सकते हैं, जिनमें अभीष्ट गुणधर्म हैं। तथापि हम R_1 में किन्हीं दो युग्मों (2, 1), (3, 2) या एक युग्म (3, 1) को नहीं बढ़ा सकते हैं, क्योंकि ऐसा करने पर हम, संक्रामकता बनाए रखने के लिए, शेष युग्म को लेने के लिए बाध्य हो जाएँगे और इस प्रक्रिया द्वारा प्राप्त संबंध सममित भी हो जाएगा, जो अभीष्ट नहीं है। अतः अभीष्ट संबंधों की कुल संख्या तीन है।

उदाहरण 24 सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में (1, 2) तथा (2, 1) को अन्तर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या 2 है।

हल (1, 2) तथा (2, 1) को अंतर्विष्ट करने वाला सबसे छोटा तुल्यता संबंध R_1, {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} है। अब केवल 4 युग्म, नामतः (2, 3), (3, 2), (1, 3) तथा (3, 1) शेष बचते हैं। यदि हम इनमें से किसी एक को, जैसे (2, 3) को R_1 में अंतर्विष्ट करते हैं, तो सममित के लिए हमें (3, 2) को भी लेना पड़ेगा, साथ ही संक्रमकता हेतु हम (1, 3) तथा (3, 1) को लेने के

लिए बाध्य होंगे। अतः R_1 से बड़ा तुल्यता संबंध केवल सार्वत्रिक संबंध है। इससे स्पष्ट होता है कि (1, 2) तथा (2, 1) को अंतर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की कुल संख्या दो है।

उदाहरण 25 तत्समक फलन $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ पर विचार कीजिए, जो $I_N(x) = x, \forall x \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि, यद्यपि I_N आच्छादक है किंतु निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ आच्छादक नहीं है

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

हल स्पष्टतया I_N आच्छादक है किंतु $I_N + I_N$ आच्छादक नहीं है। क्योंकि हम सहप्रांत **N** में एक अवयव 3 ले सकते हैं जिसके लिए प्रांत **N** में किसी ऐसे x का अस्तित्व नहीं है कि $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ हो।

उदाहरण 26 $f(x) = \sin x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ तथा $g(x) = \cos x$ द्वारा प्रदत्त फलन $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f तथा g एकैकी है, परंतु $f + g$ एकैकी नहीं है।

हल क्योंकि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, के दो भिन्न-भिन्न अवयवों x_1 तथा x_2 के लिए $\sin x_1 \neq \sin x_2$ तथा $\cos x_1 \neq \cos x_2$ इसलिए f तथा g दोनों ही आवश्यक रूप से एकैकी हैं। परंतु $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ तथा $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ है। अतः $f + g$ एकैकी नहीं है।

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैक (Injective) है।

3. एक अरिक्त समुच्चय X दिया हुआ है। P(X) जो कि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से P(X) में एक संबंध R परिभाषित कीजिए:

P(X) में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, P(X) में एक तुल्यता संबंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

4. समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. मान लीजिए कि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g : A \to B$, क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत: नोट कीजिए कि दो फलन $f : A \to B$ तथा $g : A \to B$ समान कहलाते हैं यदि $f(a) = g(a)\ \forall\, a \in A$ हो।

6. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव $(1, 2)$ तथा $(1, 3)$ हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं है, की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है।

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

सारांश

इस अध्याय में, हमने विविध प्रकार के संबंधों, फलनों तथा द्विआधारी संक्रियाओं का अध्ययन किया है। इस अध्याय की मुख्य विषय-वस्तु निम्नलिखित है:

- X में, $R = \phi \subset X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R, **रिक्त संबंध** होता है।
- X में, $R = X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R, **सार्वत्रिक संबंध** है।
- X में, ऐसा संबंध कि $\forall\, a \in X, (a, a) \in R$, **स्वतुल्य संबंध** है।
- X में, इस प्रकार का संबंध R, जो प्रतिबंध $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$ को संतुष्ट करता है **सममित संबंध** है।
- X में, प्रतिबंध R, $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R\ \forall\, a, b, c \in X$ को संतुष्ट करने वाला संबंध R **संक्रामक संबंध** है।
- X में, संबंध R, जो स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है, **तुल्यता संबंध** है।
- X में, किसी तुल्यता संबंध R के लिए $a \in X$ के **संगत तुल्यता वर्ग [a],** X का वह उपसमुच्चय है जिसके सभी अवयव a से संबंधित हैं।
- एक फलन $f : X \to Y$ एकैकी (अथवा एकैक) फलन है, यदि
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,\ \forall\ x_1, x_2 \in X$
- एक फलन $f : X \to Y$ **आच्छादक (अथवा आच्छादी)** फलन है, यदि किसी प्रदत्त $y \in Y, \exists\ x \in X$, इस प्रकार कि $f(x) = y$
- एक फलन $f : X \to Y$ **व्युत्क्रमणीय** है, यदि और केवल यदि f एकैकी तथा आच्छादक है।

◆ किसी प्रदत्त परिमित समुच्चय X के लिए फलन $f : X \to X$ एकैकी (तदानुसार आच्छादक) होता है, यदि और केवल यदि f आच्दछादक (तदानुसार एकैकी) है। यह किसी परिमित समुच्चय का अभिलाक्षणिक गुणधर्म (Characterstic Property) है। यह अपरिमित समुच्चय के लिए सत्य नहीं है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

फलन की संकल्पना, R. Descartes (सन् 1596-1650 ई.) से प्रारंभ हो कर एक लंबे अंतराल में विकसित हुई है। Descartes ने सन् 1637 ई. में अपनी पांडुलिपि "Geometrie" में शब्द 'फलन' का प्रयोग, ज्यामितीय वक्रों, जैसे अतिपरवलय (Hyperbola), परिवलय (Parabola) तथा दीर्घवृत्त (Ellipse), का अध्ययन करते समय, एक चर राशि x के धन पूर्णांक घात x^n के अर्थ में किया था। James Gregory (सन् 1636-1675 ई.) ने अपनी कृति " Vera Circuliet Hyperbolae Quadratura" (सन् 1667 ई.) में, फलन को एक ऐसी राशि माना था, जो किसी अन्य राशि पर बीजीय अथवा अन्य संक्रियाओं को उत्तरोत्तर प्रयोग करने से प्राप्त होती है। बाद में G. W. Leibnitz (1646-1716 ई.) नें 1673 ई. में लिखित अपनी पांडुलिपि "Methodus tangentium inversa, seu de functionibus" में शब्द 'फलन' को किसी ऐसी राशि के अर्थ में प्रयोग किया, जो किसी वक्र के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक इस प्रकार परिवर्तित होती रहती है, जैसे वक्र पर बिंदु के निर्देशांक, वक्र की प्रवणता, वक्र की स्पर्शी तथा अभिलंब परिवर्तित होते हैं। तथापि अपनी कृति "Historia" (1714 ई.) में Leibnitz ने फलन को एक चर पर आधारित राशि के रूप में प्रयोग किया था। वाक्यांश 'x का फलन' प्रयोग में लाने वाले वे सर्वप्रथम व्यक्ति थे। John Bernoulli (1667-1748 ई.) ने सर्वप्रथम 1718 ई. में संकेतन (Notation) ϕx को वाक्यांश 'x का फलन' को प्रकट करने के लिए किया था। परंतु फलन को निरूपित करने के लिए प्रतीकों, जैसे f, F, ϕ, ψ... का व्यापक प्रयोग Leonhard Euler (1707-1783 ई.) द्वारा 1734 ई. में अपनी पांडुलिपि "Analysis Infinitorium" के प्रथम खण्ड में किया गया था। बाद में Joeph Louis Lagrange (1736-1813 ई.) ने 1793 ई. में अपनी पांडुलिपि "Theorie des functions analytiques" प्रकाशित की, जिसमें उन्होंने विश्लेषणात्मक (Analytic) फलन के बारे में परिचर्चा की थी तथा संकेतन $f(x)$, F(x), $\phi(x)$ आदि का प्रयोग x के भिन्न-भिन्न फलनों के लिए किया था। तदोपरांत Lejeunne Dirichlet (1805-1859 ई.) ने फलन की परिभाषा दी। जिसका प्रयोग उस समय तक होता रहा जब तक वर्तमान काल में फलन की समुच्चय सैद्धांतिक परिभाषा का प्रचलन नहीं हुआ, जो Georg Cantor (1845-1918 ई) द्वारा विकसित समुच्चय सिद्धांत के बाद हुआ। वर्तमान काल में प्रचलित फलन की समुच्चय सैद्धांतिक परिभाषा Dirichlet द्वारा प्रदत्त फलन की परिभाषा का मात्र अमूर्तीकरण (Abstraction) है।

12081CH02

अध्याय **2**

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions)

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

2.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 1 में, हम पढ़ चुके हैं कि किसी फलन f का प्रतीक f^{-1} द्वारा निरूपित प्रतिलोम (Inverse) फलन का अस्तित्व केवल तभी है यदि f एकैकी तथा आच्छादक हो। बहुत से फलन ऐसे हैं जो एकैकी, आच्छादक या दोनों ही नहीं हैं, इसलिए हम उनके प्रतिलोमों की बात नहीं कर सकते हैं। कक्षा XI में, हम पढ़ चुके हैं कि त्रिकोणमितीय फलन अपने स्वाभाविक (सामान्य) प्रांत और परिसर में एकैकी तथा आच्छादक नहीं होते हैं और इसलिए उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व नहीं होता है। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांतों तथा परिसरों पर लगने वाले उन प्रतिबंधों (Restrictions) का अध्ययन करेंगे, जिनसे उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व सुनिश्चित होता है और आलेखों द्वारा प्रतिलोमों का अवलोकन करेंगे। इसके अतिरिक्त इन प्रतिलोमों के कुछ प्रारंभिक गुणधर्म (Properties) पर भी विचार करेंगे।

Arya Bhatta
(476-550 A. D.)

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, कलन (Calculus) में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं, क्योंकि उनकी सहायता से अनेक समाकल (Integrals) परिभाषित होते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की संकल्पना का प्रयोग विज्ञान तथा अभियांत्रिकी (Engineering) में भी होता है।

2.2 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic Concepts)

कक्षा XI, में, हम त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन कर चुके हैं, जो निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं

sine फलन, अर्थात्, $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

cosine फलन, अर्थात्, $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

tangent फलन, अर्थात्, $\tan : \mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent फलन, अर्थात्, $\cot : \mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant फलन, अर्थात्, $\sec : \mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

cosecant फलन, अर्थात्, $\text{cosec} : \mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

हम अध्याय 1 में यह भी सीख चुके हैं कि यदि $f : X \to Y$ इस प्रकार है कि $f(x) = y$ एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो तो हम एक अद्वितीय फलन $g : Y \to X$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि $g(y) = x$, जहाँ $x \in X$ तथा $y = f(x), y \in Y$ है। यहाँ g का प्रांत $= f$ का परिसर और g का परिसर $= f$ का प्रांत। फलन g को फलन f का प्रतिलोम कहते हैं और इसे f^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। साथ ही g भी एकैकी तथा आच्छादक होता है और g का प्रतिलोम फलन f होता हैं अतः $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ इसके साथ ही

$$(f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

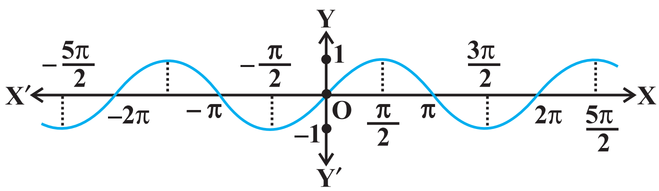
और $$(f \text{ o } f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

क्योंकि sine फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर संवृत अंतराल $[-1, 1]$ है। यदि हम इसके प्रांत को $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में सीमित (प्रतिबंधित) कर दें, तो यह परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। वास्तव में, sine फलन, अंतरालों $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में, से किसी में भी सीमित होने से, परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। अतः हम इनमें से प्रत्येक अंतराल में, sine फलन के प्रतिलोम फलन को $\sin^{-1}$ (arc sine function) द्वारा निरूपित करते हैं। अतः $\sin^{-1}$ एक फलन है, जिसका प्रांत $[-1, 1]$ है, और जिसका परिसर $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ या $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में से कोई भी अंतराल हो सकता है। इस प्रकार के प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\sin^{-1}$ की एक शाखा (Branch) प्राप्त होती है। वह शाखा, जिसका परिसर $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, **मुख्य शाखा** (**मुख्य मान शाखा**) कहलाती है, जब कि परिसर के रूप में अन्य अंतरालों से $\sin^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ मिलती हैं। जब हम फलन $\sin^{-1}$ का उल्लेख करते हैं, तब हम इसे प्रांत $[-1, 1]$ तथा परिसर $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ वाला फलन समझते हैं। इसे हम $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ लिखते हैं।

प्रतिलोम फलन की परिभाषा द्वारा, यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sin(\sin^{-1} x) = x$, यदि $-1 \le x \le 1$ तथा $\sin^{-1}(\sin x) = x$ यदि $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ है। दूसरे शब्दों में, यदि $y = \sin^{-1} x$ हो तो $\sin y = x$ होता है।

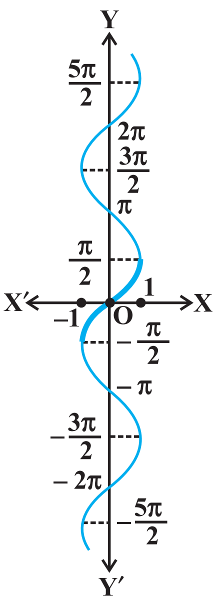
टिप्पणी

(i) हमें अध्याय 1 से ज्ञात है कि, यदि $y = f(x)$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है, तो $x = f^{-1}(y)$ होता है। अतः मूल फलन sin के आलेख में x तथा y अक्षों का परस्पर विनिमय करके फलन $\sin^{-1}$ का आलेख प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, यदि (a, b), sin फलन के आलेख का एक बिंदु है, तो (b, a), sin फलन के प्रतिलोम फलन का संगत बिंदु होता है। अतः फलन



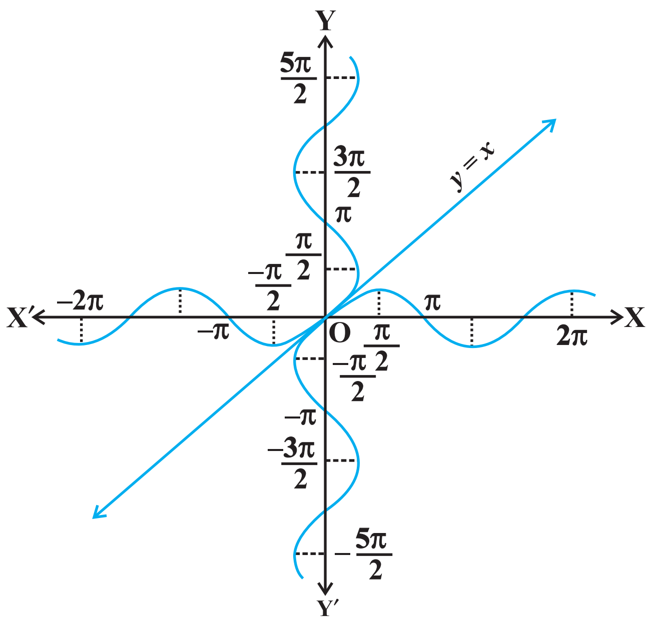
$y = \sin x$

आकृति 2.1 (i)



$y = \sin^{-1}x$

आकृति 2.1 (ii)



$y = \sin x$ और $y = \sin^{-1} x$

आकृति 2.1 (iii)

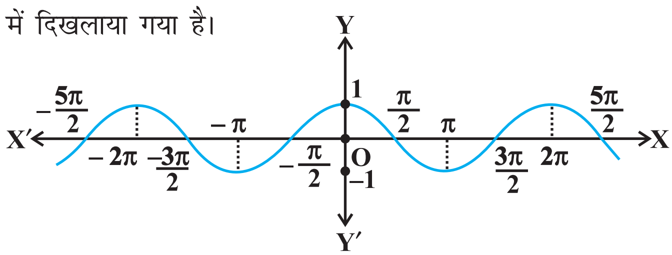
$y = \sin^{-1} x$ का आलेख, फलन $y = \sin x$ के आलेख में x तथा y अक्षों के परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है। फलन $y = \sin x$ तथा फलन $y = \sin^{-1} x$ के आलेखों को आकृति 2.1 (i), (ii), में दर्शाया गया है। फलन $y = \sin^{-1} x$ के आलेख में गहरा चिह्नित भाग मुख्य शाखा को निरूपित करता है।

(ii) यह दिखलाया जा सकता है कि प्रतिलोम फलन का आलेख, रेखा $y = x$ के परित: (Along), संगत मूल फलन के आलेख को दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image), अर्थात् परावर्तन (Reflection) के रूप में प्राप्त किया जा सकता है। इस बात की कल्पना, $y = \sin x$ तथा $y = \sin^{-1} x$ के उन्हीं अक्षों (Same axes) पर, प्रस्तुत आलेखों से की जा सकती है (आकृति 2.1 (iii))।

sine फलन के समान cosine फलन भी एक ऐसा फलन है जिसका प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और जिसका परिसर समुच्चय $[-1, 1]$ है। यदि हम cosine फलन के प्रांत को अंतराल $[0, \pi]$ में सीमित कर दें तो यह परिसर $[-1, 1]$ वाला एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। वस्तुत:, cosine फलन, अंतरालों $[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से, परिसर $[-1, 1]$ वाला एक एकैकी आच्छादी (Bijective) फलन हो जाता है। अत: हम इन में से प्रत्येक अंतराल में cosine फलन के प्रतिलोम को परिभाषित कर सकते हैं। हम cosine फलन के प्रतिलोम फलन को $\cos^{-1}$ (arc cosine function) द्वारा निरूपित करते हैं। अत: $\cos^{-1}$ एक फलन है जिसका प्रांत $[-1, 1]$ है और परिसर $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ इत्यादि में से कोई भी अंतराल हो सकता है। इस प्रकार के प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\cos^{-1}$ की एक शाखा प्राप्त होती है। वह शाखा, जिसका परिसर $[0, \pi]$ है, मुख्य शाखा (मुख्य मान शाखा) कहलाती है और हम लिखते हैं कि

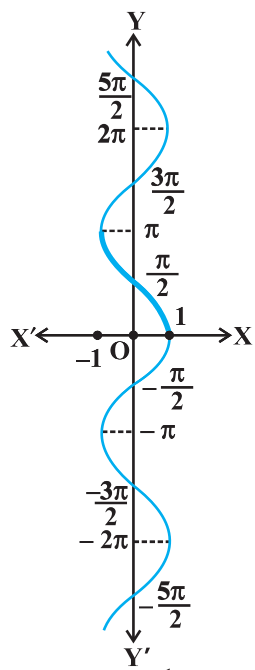
$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$y = \cos^{-1} x$ द्वारा प्रदत्त फलन का आलेख उसी प्रकार खींचा जा सकता है जैसा कि $y = \sin^{-1} x$ के आलेख के बारे में वर्णन किया जा चुका है। $y = \cos x$ तथा $y = \cos^{-1} x$ के आलेखों को आकृतियों 2.2 (i) तथा (ii) में दिखलाया गया है।



$y = \cos x$

आकृति 2.2 (i)

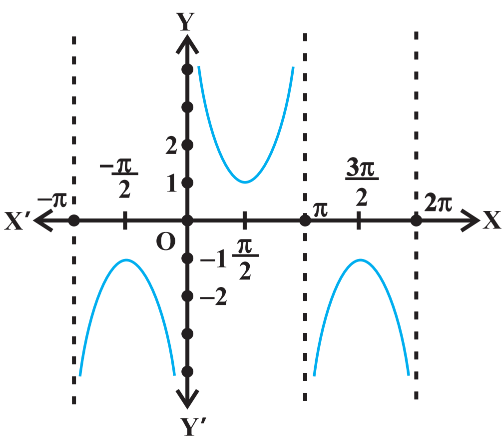


$y = \cos^{-1} x$

आकृति 2.2 (ii)

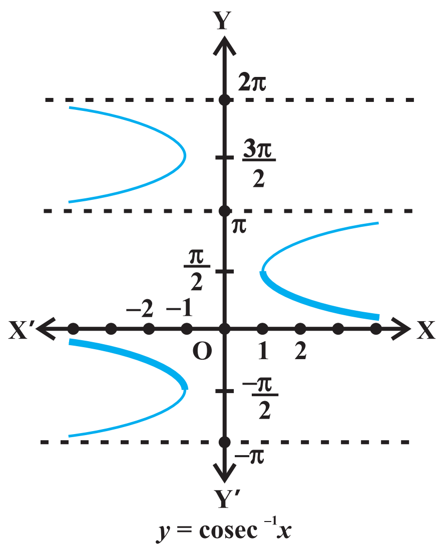
आइए अब हम $\text{cosec}^{-1}x$ तथा $\sec^{-1}x$ पर विचार करें।

क्योंकि $\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$, इसलिए cosec फलन का प्रांत समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ और $x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R},\ y \geq 1$ अथवा $y \leq -1\}$, अर्थात्, समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ है। इसका अर्थ है कि $y = \text{cosec}\, x$, $-1 < y < 1$ को छोड़ कर अन्य सभी वास्तविक मानों को ग्रहण करता है तथा यह π के पूर्णांक (Integral) गुणजों के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम cosec फलन के प्रांत को अंतराल $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, में सीमित कर दें, तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन होता है, जिसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$. होता है। वस्तुत: cosec फलन, अंतरालों $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। इस प्रकार cosec^{-1} एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है जिसका प्रांत $\mathbf{R} - (-1, 1)$ है और परिसर अंतरालों $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ इत्यादि में से कोई भी एक हो सकता है। परिसर $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ के संगत फलन को cosec^{-1} की **मुख्य शाखा** कहते हैं। इस प्रकार मुख्य शाखा निम्नलिखित तरह से व्यक्त होती है:



$y = \text{cosec}\, x$

आकृति 2.3 (i)



$y = \text{cosec}^{-1}x$

आकृति 2.3 (ii)

$$\text{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1,\ 1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

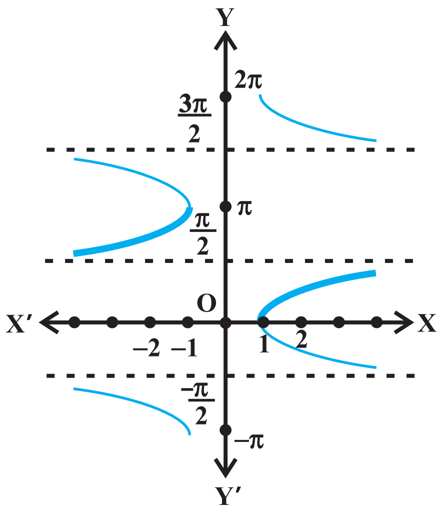
$y = \text{cosec}\, x$ तथा $y = \text{cosec}^{-1} x$ के आलेखों को आकृति 2.3 (i), (ii) में दिखलाया गया है।

इसी तरह, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \sec x$ का प्रांत समुच्चय $\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1,\ 1)$ है। इसका अर्थ है कि sec (secant) फलन $-1 < y < 1$ को छोड़कर अन्य सभी वास्तविक मानों को ग्रहण (Assumes) करता है और यह $\dfrac{\pi}{2}$ के विषम गुणजों के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम secant फलन के प्रांत को अंतराल $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, में सीमित कर दें तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन होता है जिसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। वास्तव में secant फलन अंतरालों $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। अतः $\sec^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है जिसका प्रांत $(-1, 1)$ हो और जिसका परिसर अंतरालों $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ इत्यादि में से कोई भी हो सकता है। इनमें से प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\sec^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ प्राप्त होती हैं। वह शाखा जिसका परिसर $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$ होता है, फलन $\sec^{-1}$ की मुख्य शाखा कहलाती है। इसको हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं:

$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

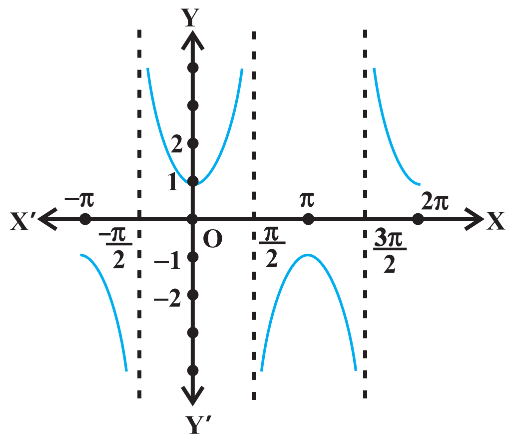
$y = \sec x$ तथा $y = \sec^{-1} x$ के आलेखों को आकृतियों 2.4 (i), (ii) में दिखलाया गया है। अंत में, अब हम $\tan^{-1}$ तथा $\cot^{-1}$ पर विचार करेंगे।

हमें ज्ञात है कि, tan फलन (tangent फलन) का प्रांत समुच्चय$\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर $\mathbf{R}$ है। इसका अर्थ है कि tan फलन $\dfrac{\pi}{2}$ के विषम गुणजों



$y = \sec^{-1}x$

आकृति 2.4 (i)

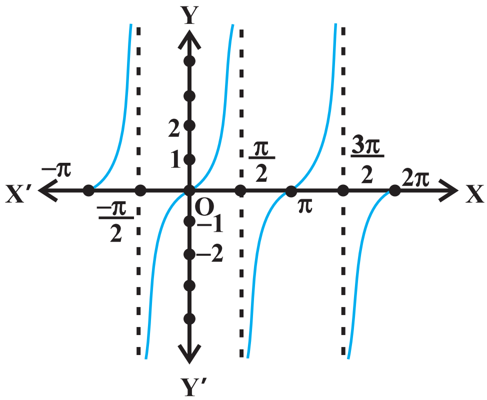


$y = \sec x$

आकृति 2.4 (ii)

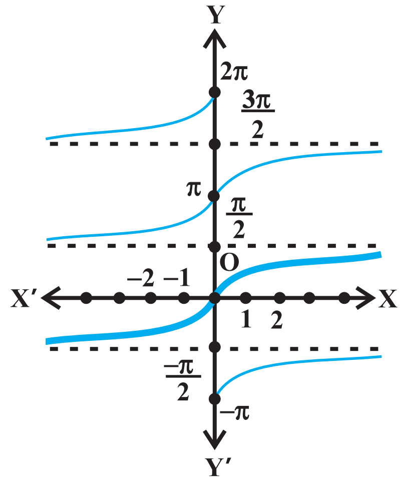
के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम tangent फलन के प्रांत को अंतराल $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में सीमित कर दें, तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है जिसका परिसर समुच्चय **R** होता है। वास्तव में, tangent फलन, अंतरालों $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय **R** होता है। अतएव $\tan^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है, जिसका प्रांत **R** हो और परिसर अंतरालों $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ इत्यादि में से कोई भी हो सकता है। इन अंतरालों द्वारा फलन $\tan^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ मिलती हैं। वह शाखा, जिसका परिसर $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है, फलन $\tan^{-1}$ की **मुख्य शाखा** कहलाती है। इस प्रकार

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan x$

आकृति 2.5 (i)

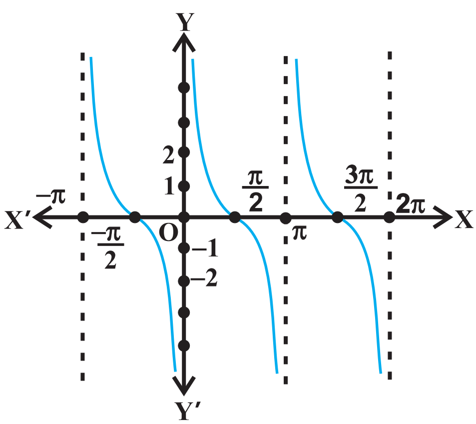


$y = \tan^{-1}x$

आकृति 2.5 (ii)

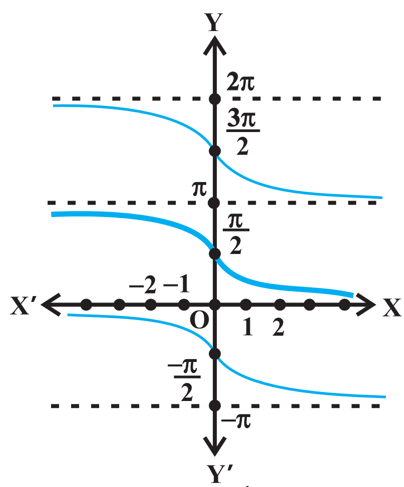
$y = \tan x$ तथा $y = \tan^{-1}x$ के आलेखों को आकृतियों 2.5 (i), (ii) में दिखलाया गया है।

हमें ज्ञात है कि cot फलन (cotangent फलन) का प्रांत समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय **R** है। इसका अर्थ है कि cotangent फलन, π के पूर्णांकीय गुणजों



$y = \cot x$

आकृति 2.6 (i)



$y = \cot^{-1}x$

आकृति 2.6 (ii)

के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम cotangent फलन के प्रांत को अंतराल $(0, \pi)$ में सीमित कर दें तो यह परिसर **R** वाला एक एकैकी आच्छादी फलन होता है। वस्तुतः cotangent फलन अंतरालों $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय **R** होता है। वास्तव में $\cot^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है, जिसका प्रांत **R** हो और परिसर, अंतरालों $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ इत्यादि में से कोई भी हो। इन अंतरालों से फलन $\cot^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ प्राप्त होती हैं। वह शाखा, जिसका परिसर $(0, \pi)$ होता है, फलन $\cot^{-1}$ की **मुख्य शाखा** कहलाती है। इस प्रकार

$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$y = \cot x$ तथा $y = \cot^{-1}x$ के आलेखों को आकृतियों 2.6 (i), (ii) में प्रदर्शित किया गया है।

निम्नलिखित सारणी में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (मुख्य मानीय शाखाओं) को उनके प्रांतों तथा परिसरों के साथ प्रस्तुत किया गया है।

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

टिप्पणी

1. $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रांति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ और यह तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी सत्य होता है।
2. जब कभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की किसी शाखा विशेष का उल्लेख न हो, तो हमारा तात्पर्य उस फलन की मुख्य शाखा से होता है।
3. किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का **मुख्य मान** (Principal value) कहलाता है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे:

उदाहरण 1 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. अत: $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

हमें ज्ञात है कि $\sin^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ है।

इसलिए $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{4}$ है।

उदाहरण 2 $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$. अतएव

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ है।}$$

हमें ज्ञात है कि $\cot^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है और $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ है। अत:

$\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए:

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $\text{cosec}^{-1}(2)$

4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **12.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. यदि $\sin^{-1} x = y$, तो

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

स्मरण कीजिए कि, यदि $y = \sin^{-1}x$ हो तो $x = \sin y$ तथा यदि $x = \sin y$ हो तो $y = \sin^{-1}x$ होता है। यह इस बात के समतुल्य (Equivalent) है कि

$$\sin(\sin^{-1} x) = x, x \in [-1, 1] \text{ तथा } \sin^{-1}(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

उचित परिसर मानों के लिए अन्य समरूप त्रिकोणमितीय फलन भी परिणाम देते हैं।

उदाहरण 3 दर्शाइए कि

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

हल

(i) मान लीजिए कि $x = \sin\theta$ तो $\sin^{-1} x = \theta$ इस प्रकार

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\sin^{-1}x$$

(ii) मान लीजिए कि $x = \cos\theta$ तो उपर्युक्त विधि के प्रयोग द्वारा हमें $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $-\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हम लिख सकते हैं कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

उदाहरण 5 $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए।

हल मान लीजिए कि $x = \sec\theta$, then $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

इसलिए $\cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ जो अभीष्ट सरलतम रूप है।

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए:

3. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

4. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), 0 < x < \pi$

5. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \frac{-\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

6. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

8. $\tan^{\ 1}\left[2\cos\left(2\sin^{\ 1}\frac{1}{2}\right)\right]$

9. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0$ तथा $xy < 1$

प्रश्न संख्या 16 से 18 में दिए प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

10. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **11.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

12. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

13. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

14. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ का मान है

(A) $\frac{1}{2}$ है (B) $\frac{1}{3}$ है (C) $\frac{1}{4}$ है (D) 1

15. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान

(A) π है (B) $-\frac{\pi}{2}$ है (C) 0 है (D) $2\sqrt{3}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 6 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $\sin^{-1}(\sin x)=x$ होता है। इसलिए $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$

किंतु $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, जो $\sin^{-1}x$ की मुख्य शाखा है।

तथापि $\sin(\frac{3\pi}{5})=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5}) = \sin\frac{2\pi}{5}$ तथा $\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

अत: $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5}) = \sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

1. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{7\pi}{6}\right)$

सिद्ध कीजिए

3. $2\sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{24}{7}$ **4.** $\sin^{-1}\dfrac{8}{17} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \cos^{-1}\dfrac{33}{65}$ **6.** $\cos^{-1}\dfrac{12}{13} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \sin^{-1}\dfrac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\dfrac{63}{16} = \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

सिद्ध कीजिए:

8. $\tan^{1}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\cos^{1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

9. $\cot^{1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \dfrac{x}{2},\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

10. $\tan^{1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\cos^{1}x,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [**संकेत**: $x = \cos 2\theta$ रखिए]

निम्नलिखित समीकरणों को सरल कीजिए:

11. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\ \text{cosec}\ x)$ **12.** $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

13. $\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1$ बराबर होता है:

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

14. यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$, तो x का मान बराबर है:

(A) $0, \dfrac{1}{2}$ (B) $1, \dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$

सारांश

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (मुख्य शाखा) के प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित सारणी में वर्णित हैं:

फलन	प्रांत	परिसर (मुख्य शाखा)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = \sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$
$y = \tan^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रान्ति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ और इसी प्रकार यह तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए सत्य होता है।
- किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का **मुख्य मान** (Principal Value) कहलाता है।

उपयुक्त प्रांतों के लिए

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ऐसा विश्वास किया जाता है कि त्रिकोणमिती का अध्ययन सर्वप्रथम भारत में आरंभ हुआ था। आर्यभट्ट (476 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.)ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह संपूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुन: वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरंभ किया परंतु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह संपूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गई।

भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण सिद्धांत (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने 90° से अधिक, कोणों के sine के मान के लए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में $\sin(A+B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। 18°, 36°, 54°, 72°, आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए हैं।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, आदि को चाप $\sin x$, चाप $\cos x$, आदि के स्थान पर प्रयोग करने का सुझाव ज्योतिषविद Sir John F.W. Hersehel (1813 ई.) द्वारा दिए गए थे। ऊँचाई और दूरी संबंधित प्रश्नों के साथ Thales (600 ई. पूर्व) का नाम अपरिहार्य रूप से जुड़ा हुआ है। उन्हें मिश्र के महान पिरामिड की ऊँचाई के मापन का श्रेय प्राप्त है। इसके लिए उन्होंने एक ज्ञात ऊँचाई के सहायक दंड तथा पिरामिड की परछाइयों को नापकर उनके अनुपातों की तुलना का प्रयोग किया था। ये अनुपात हैं

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (सूर्य का उन्नतांश)}$$

Thales को समुद्री जहाज़ की दूरी की गणना करने का भी श्रेय दिया जाता है। इसके लिए उन्होंने समरूप त्रिभुजों के अनुपात का प्रयोग किया था। ऊँचाई और दूरी संबधी प्रश्नों का हल समरूप त्रिभुजों की सहायता से प्राचीन भारतीय कार्यों में मिलते हैं।

12081CH03

अध्याय 3

आव्यूह (Matrices)

❖ *The essence of mathematics lies in its freedom — CANTOR* ❖

3.1 भूमिका (Introduction)

गणित की विविध शाखाओं में आव्यूह के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है। आव्यूह, गणित के सर्वाधिक शक्तिशाली साधनों में से एक है। अन्य सीधी-सादी विधियों की तुलना में यह गणितीय साधन हमारे कार्य को काफी हद तक सरल कर देता है। रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए संक्षिप्त तथा सरल विधियाँ प्राप्त करने के प्रयास के परिणामस्वरूप आव्यूह की संकल्पना का विकास हुआ। आव्यूहों को केवल रैखिक समीकरणों के निकाय के गुणांकों को प्रकट करने के लिए ही नहीं प्रयोग किया जाता है, अपितु आव्यूहों की उपयोगिता इस प्रयोग से कहीं अधिक है। आव्यूह संकेतन तथा संक्रियाओं का प्रयोग व्यक्तिगत कंप्यूटर के लिए इलेक्ट्रानिक स्प्रेडशीट प्रोग्रामों (Electronic Spreadsheet Programmes) में किया जाता है, जिसका प्रयोग, क्रमशः वाणिज्य तथा विज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों में होता है, जैसे, बजट (Budgeting), विक्रय बहिर्वेशन (Sales Projection), लागत आकलन (Cost Estimation), किसी प्रयोग के परिणामों का विश्लेषण इत्यादि। इसके अतिरिक्त अनेक भौतिक संक्रियाएँ जैसे आवर्धन (Magnification), घूर्णन (Rotation) तथा किसी समतल द्वारा परावर्तन (Reflection) को आव्यूहों द्वारा गणितीय ढंग से निरूपित किया जा सकता है। आव्यूहों का प्रयोग गूढ़लेखिकी (Cryptography) में भी होता है। इस गणितीय साधन का प्रयोग न केवल विज्ञान की ही कुछ शाखाओं तक सीमित है, अपितु इसका प्रयोग अनुवंशिकी, अर्थशास्त्र, आधुनिक मनोविज्ञान तथा औद्योगिक प्रबंधन में भी किया जाता है।

इस अध्याय में आव्यूह तथा आव्यूह बीजगणित (Matrix algebra) के आधारभूत सिद्धांतों से अवगत होना, हमें रुचिकर लगेगा।

3.2 आव्यूह (Matrix)

मान लीजिए कि हम यह सूचना व्यक्त करना चाहते हैं कि राधा के पास 15 पुस्तिकाएँ हैं। इसे हम [15] रूप में, इस समझ के साथ व्यक्त कर सकते हैं, कि [ ] के अंदर लिखित संख्या राधा के पास पुस्तिकाओं की संख्या है। अब यदि हमें यह व्यक्त करना है कि राधा के पास 15 पुस्तिकाएँ तथा 6 कलमें हैं, तो इसे हम [15 6] प्रकार से, इस समझ के साथ व्यक्त कर सकते हैं कि [ ] के अंदर की प्रथम प्रविष्टि राधा के पास की पुस्तिकाओं की संख्या, जबकि द्वितीय प्रविष्टि राधा के पास कलमों

की संख्या दर्शाती है। अब मान लीजिए कि हम राधा तथा उसके दो मित्रों फौजिया तथा सिमरन के पास की पुस्तिकाओं तथा कलमों की निम्नलिखित सूचना को व्यक्त करना चाहते हैं:

राधा के पास	15	पुस्तिकाएँ तथा	6 कलम हैं,
फौजिया के पास	10	पुस्तिकाएँ तथा	2 कलम हैं,
सिमरन के पास	13	पुस्तिकाएँ तथा	5 कलम हैं,

अब इसे हम सारणिक रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं:

	पुस्तिका	**कलम**
राधा	15	6
फौजिया	10	2
सिमरन	13	5

इसे निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{पहली पंक्ति} \\ \leftarrow \text{दूसरी पंक्ति} \\ \leftarrow \text{तीसरी पंक्ति} \end{matrix}$$

↑ पहला स्तंभ ↑ दूसरा स्तंभ

अथवा

	राधा	**फौजिया**	**सिमरन**
पुस्तिका	15	10	13
कलम	6	2	5

जिसे निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{पहली पंक्ति} \\ \leftarrow \text{दूसरी पंक्ति} \end{matrix}$$

↑ पहला स्तंभ ↑ दूसरा स्तंभ ↑ तीसरा स्तंभ

पहली प्रकार की व्यवस्था में प्रथम स्तंभ की प्रविष्टियाँ क्रमश: राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास पुस्तिकाओं की संख्या प्रकट करती हैं और द्वितीय स्तंभ की प्रविष्टियाँ क्रमश: राधा, फौजिया तथा

सिमरन के पास कलमों की संख्या प्रकट करती हैं। इसी प्रकार, दूसरी प्रकार की व्यवस्था में प्रथम पंक्ति की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास पुस्तिकाओं की संख्या प्रकट करती हैं। द्वितीय पंक्ति की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास कलमों की संख्या प्रकट करती हैं। उपर्युक्त प्रकार की व्यवस्था या प्रदर्शन को आव्यूह कहते हैं। औपचारिक रूप से हम आव्यूह को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं:

परिभाषा 1 आव्यूह संख्याओं या फलनों का एक आयताकार क्रम-विन्यास है। इन संख्याओं या फलनों को आव्यूह के अवयव अथवा प्रविष्टियाँ कहते हैं।

आव्यूह को हम अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े (Capital) अक्षरों द्वारा व्यक्त करते हैं। आव्यूहों के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 0 & \sqrt{5}\\ 3 & 6\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}2+i & 3 & -\frac{1}{2}\\ 3.5 & -1 & 2\\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7}\end{bmatrix},\ \mathrm{C}=\begin{bmatrix}1+x & x^3 & 3\\ \cos x & \sin x+2 & \tan x\end{bmatrix}$$

उपर्युक्त उदाहरणों में क्षैतिज रेखाएँ आव्यूह की पंक्तियाँ (Rows) और ऊर्ध्व रेखाएँ आव्यूह के स्तंभ (Columns) कहलाते हैं। इस प्रकार A में 3 पंक्तियाँ तथा 2 स्तंभ हैं और B में 3 पंक्तियाँ तथा 3 स्तंभ जबकि C में 2 पंक्तियाँ तथा 3 स्तंभ हैं।

3.2.1 *आव्यूह की कोटि (Order of a matrix)*

m पंक्तियों तथा n स्तंभों वाले किसी आव्यूह को $m \times n$ कोटि (order) का आव्यूह अथवा केवल $m \times n$ आव्यूह कहते हैं । अतएव आव्यूहों के उपर्युक्त उदाहरणों के संदर्भ में A, एक 3×2 आव्यूह, B एक 3×3 आव्यूह तथा C, एक 2×3 आव्यूह हैं। हम देखते हैं कि A में $3 \times 2 = 6$ अवयव है और B तथा C में क्रमशः 9 तथा 6 अवयव हैं।

सामान्यतः, किसी $m \times n$ आव्यूह का निम्नलिखित आयाताकार क्रम-विन्यास होता है:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m \times n}$$

अथवा $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ जहाँ $i, j \in \mathbf{N}$

इस प्रकार iवीं पंक्ति के अवयव $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},..., a_{in}$ हैं, जबकि jवें स्तंभ के अवयव $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j},..., a_{mj}$ हैं।

सामान्यत: a_{ij}, iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ में आने वाला अवयव होता है। हम इसे A का (i, j)वाँ अवयव भी कह सकते हैं। किसी $m \times n$ आव्यूह में अवयवों की संख्या mn होती है।

टिप्पणी इस अध्याय में,

1. हम किसी $m \times n$ कोटि के आव्यूह को प्रकट करने के लिए, संकेत $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ का प्रयोग करेंगे।
2. हम केवल ऐसे आव्यूहों पर विचार करेंगे, जिनके अवयव वास्तविक संख्याएँ हैं अथवा वास्तविक मानों को ग्रहण करने वाले फलन हैं।

हम एक समतल के किसी बिंदु (x, y) को एक आव्यूह (स्तंभ अथवा पंक्ति) द्वारा प्रकट कर सकते हैं, जैसे $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (अथवा $[x, y]$)से, उदाहरणार्थ, बिंदु P(0, 1), आव्यूह निरूपण में $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ या [0 1] द्वारा प्रकट किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि इस प्रकार हम किसी बंद रैखिक आकृति के शीर्षों को एक आव्यूह के रूप में लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए एक चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए, जिसके शीर्ष क्रमश: A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), तथा D (–1, 2) हैं।

अब, चतुर्भुज ABCD आव्यूह रूप में निम्नलिखित प्रकार से निरूपित किया जा सकता है:

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{matrix} \quad \text{या} \quad Y = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

अत: आव्यूहों का प्रयोग किसी समतल में स्थित ज्यामितीय आकृतियों के शीर्षों को निरूपित करने के लिए किया जा सकता है।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 तीन फैक्ट्रियों I, II तथा III में पुरुष तथा महिला कर्मियों से संबंधित निम्नलिखित सूचना पर विचार कीजिए:

	पुरुष कर्मी	महिला कर्मी
I	30	25
II	25	31
III	27	26

उपर्युक्त सूचना को एक 3×2 आव्यूह में निरूपित कीजिए। तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ वाली प्रविष्टि क्या प्रकट करती है?

हल प्रदत्त सूचना को 3×2 आव्यूह के रूप में निम्नलिखित प्रकार से निरूपित किया जा सकता है:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ की प्रविष्टि फैक्ट्री-III कारखाने में महिला कार्यकर्ताओं की संख्या प्रकट करती है।

उदाहरण 2 यदि किसी आव्यूह में 8 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हो सकती हैं?

हल हमें ज्ञात है कि, यदि किसी आव्यूह की कोटि $m \times n$ है तो इसमें mn अवयव होते हैं। अतएव 8 अवयवों वाले किसी आव्यूह के सभी संभव कोटियाँ ज्ञात करने के लिए हम प्राकृत संख्याओं के उन सभी क्रमित युग्मों को ज्ञात करेंगे जिनका गुणनफल 8 है।

अत: सभी संभव क्रमित युग्म $(1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4)$ हैं।

अतएव संभव कोटियाँ $1 \times 8, 8 \times 1, 4 \times 2, 2 \times 4$ हैं।

उदाहरण 3 एक ऐसे 3×2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ द्वारा प्रदत्त हैं।

हल एक 3×2 आव्यूह, सामान्यत: इस प्रकार होता है: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

अब, $$a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|, \; i = 1, 2, 3 \text{ तथा } j = 1, 2$$

इसलिए

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3.1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3.2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3.1| = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2-3.2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3.1| = 0 \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3.2| = \frac{3}{2}$$

अत: अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ है।

3.3 आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices)

इस अनुच्छेद में हम विभिन्न प्रकार के आव्यूहों की परिचर्चा करेंगे।

(i) **स्तंभ आव्यूह (Column matrix)**

एक आव्यूह, **स्तंभ आव्यूह** कहलाता है, यदि उसमें केवल एक स्तंभ होता है। उदाहरण के लिए $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 4×1 कोटि का एक स्तंभ आव्यूह है। व्यापक रूप से, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ एक $m \times 1$ कोटि का स्तंभ आव्यूह है।

(ii) **पंक्ति आव्यूह (Row matrix)**

एक आव्यूह, *पंक्ति आव्यूह* कहलाता है, यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है।

उदाहरण के लिए $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$, 1×4 कोटि का एक पंक्ति आव्यूह है। व्यापक रूप से, $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$ एक $1 \times n$ कोटि का पंक्ति आव्यूह है।

(iii) **वर्ग आव्यूह (Square matrix)**

एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के समान होती है, एक *वर्ग आव्यूह* कहलाता है। अत: एक $m \times n$ आव्यूह, वर्ग आव्यूह कहलाता है, यदि $m = n$ और उसे कोटि

'n' का वर्ग आव्यूह कहते हैं। उदाहरण के लिए $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ एक 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है। व्यापक रूप से $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ एक m कोटि का वर्ग आव्यूह है।

टिप्पणी यदि $A = [a_{ij}]$ एक n कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो अवयवों (प्रविष्टियाँ) $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ को आव्यूह A के विकर्ण के अवयव कहते हैं।

अतः यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ है तो A के विकर्ण के अवयव 1, 4, 6 हैं।

(iv) **विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)**

एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ *विकर्ण आव्यूह* कहलाता है, यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं अर्थात्, एक आव्यूह $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ विकर्ण आव्यूह कहलाता है, यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

उदाहरणार्थ $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, क्रमशः कोटि 1, 2 तथा 3 के विकर्ण आव्यूह हैं।

(v) **अदिश आव्यूह (Scalar matrix)**

एक विकर्ण आव्यूह, *अदिश आव्यूह* कहलाता है, यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं, अर्थात्, एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ अदिश आव्यूह कहलाता है, यदि

$b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$

$b_{ij} = k$, जब $i = j$, जहाँ k कोई अचर है।

उदाहरणार्थ,

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ क्रमशः

कोटि 1, 2 तथा 3 के अदिश आव्यूह हैं।

(vi) **तत्समक आव्यूह (Identity matrix)**

एक वर्ग आव्यूह, जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 होते हैं तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, *तत्समक आव्यूह* कहलाता है। दूसरे शब्दों में, वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक तत्समक आव्यूह है, यदि $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{यदि } i = j \\ 0 & \text{यदि } i \neq j \end{cases}$

हम, n कोटि के तत्समक आव्यूह को I_n द्वारा निरूपित करते हैं। जब संदर्भ से कोटि स्पष्ट होती है, तब इसे हम केवल I से प्रकट करते हैं।

उदाहरण के लिए $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ क्रमश: कोटि 1, 2 तथा 3 के तत्समक आव्यूह हैं।

ध्यान दीजिए कि यदि $k = 1$ हो तो, एक अदिश आव्यूह, तत्समक आव्यूह होता है, परंतु प्रत्येक तत्समक आव्यूह स्पष्टतया एक अदिश आव्यूह होता है।

(vii) **शून्य आव्यूह (Zero matrix)**

एक आव्यूह, शून्य आव्यूह अथवा *रिक्त आव्यूह* कहलाता है, यदि इसके सभी अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरणार्थ, $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0, 0]$ सभी शून्य आव्यूह हैं। हम शून्य आव्यूह को O द्वारा निरूपित करते हैं। इनकी कोटियाँ, संदर्भ द्वारा स्पष्ट होती हैं।

3.3.1 *आव्यूहों की समानता (Equality of matrices)*

परिभाषा 2 दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कहलाते हैं, यदि

(i) वे समान कोटियों के होते हों, तथा

(ii) A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के समान हो, अर्थात् i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हों

उदाहरण के लिए, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह हैं किंतु $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में, यदि दो आव्यूह A तथा B समान हैं, तो हम इसे $A = B$ लिखते हैं।

यदि $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, तो $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

उदाहरण 4 यदि $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

हो तो a, b, c, x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि प्रदत्त आव्यूह समान हैं, इसलिए इनके संगत अवयव भी समान होंगे। संगत अवयवों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

$$x + 3 = 0, \quad z + 4 = 6, \quad 2y - 7 = 3y - 2$$
$$a - 1 = -3, \quad 0 = 2c + 2, \quad b - 3 = 2b + 4,$$

इन्हें सरल करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$a = -2, b = -7, c = -1, x = -3, y = -5, z = 2$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ हो तो $a, b, c,$ तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

हल दो आव्यूहों की समानता की परिभाषा द्वारा, संगत अवयवों को समान रखने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$2a + b = 4 \quad 5c - d = 11$$
$$a - 2b = -3 \quad 4c + 3d = 24$$

इन समीकरणों को सरल करने पर $a = 1, b = 2, c = 3$ तथा $d = 4$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 3.1

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, के लिए ज्ञात कीजिए:

(i) आव्यूह की कोटि (ii) अवयवों की संख्या

(iii) अवयव $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

2. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

4. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रदत्त हैं

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

5. एक 3×4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं:

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = \frac{-1}{3}, y = 7$ (B) ज्ञात करना संभव नहीं है

(C) $y = 7, x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{-2}{3}$.

10. 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 आव्यूहों पर संक्रियाएँ (Operations on Matrices)

इस अनुच्छेद में हम आव्यूहों पर कुछ संक्रियाओं को प्रस्तुत करेंगे जैसे आव्यूहों का योग, किसी आव्यूह का एक अदिश से गुणा, आव्यूहों का व्यवकलन तथा गुणा:

3.4.1 *आव्यूहों का योग (Addition of matrices)*

मान लीजिए कि फातिमा की स्थान A तथा स्थान B पर दो फैक्ट्रियाँ हैं। प्रत्येक फैक्ट्री में लड़कों तथा लड़कियों के लिए, खेल के जूते, तीन भिन्न-भिन्न मूल्य वर्गों, क्रमशः 1, 2 तथा 3 के बनते हैं। प्रत्येक फैक्ट्री में बनने वाले जूतों की संख्या नीचे दिए आव्यूहों द्वारा निरूपित हैं:

$$\begin{array}{c} \text{A पर फैक्ट्री} \\ \begin{array}{cc} \text{लड़के} & \text{लड़कियाँ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{B पर फैक्ट्री} \\ \begin{array}{cc} \text{लड़के} & \text{लड़कियाँ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

मान लीजिए कि फातिमा प्रत्येक मूल्य वर्ग में बनने वाले खेल के जूतों की कुल संख्या जानना चाहती हैं। अब कुल उत्पादन इस प्रकार है:

मूल्य वर्ग 1 : लड़कों के लिए $(80 + 90)$, लड़कियों के लिए $(60 + 50)$

मूल्य वर्ग 2 : लड़कों के लिए $(75 + 70)$, लड़कियों के लिए $(65 + 55)$

मूल्य वर्ग 3 : लड़कों के लिए $(90 + 75)$, लड़कियों के लिए $(85 + 75)$

आव्यूह के रूप में इसे इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

यह नया आव्यूह, उपर्युक्त दो आव्यूहों का **योगफल** है। हम देखते हैं कि दो आव्यूहों का योगफल, प्रदत्त आव्यूहों के संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त होने वाला आव्यूह होता है। इसके अतिरिक्त, योग के लिए दोनों आव्यूहों को समान कोटि का होना चाहिए।

इस प्रकार, यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ एक 2×3 आव्यूह है तथा $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ एक अन्य 2×3 आव्यूह है, तो हम $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

व्यापक रूप से, मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ दो समान कोटि, $m \times n$ वाले आव्यूह हैं तो A तथा B दोनों आव्यूहों का योगफल, आव्यूह $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, द्वारा परिभाषित होता है, जहाँ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i तथा j के सभी संभव मानों को व्यक्त करता है।

उदाहरण 6 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ है तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि A तथा B समान कोटि 2×3 वाले आव्यूह हैं, इसलिए A तथा B का योग परिभाषित है, और

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ द्वारा प्राप्त होता है।

टिप्पणी

1. हम इस बात पर बल देते हैं कि यदि A तथा B समान कोटि वाले आव्यूह नहीं हैं तो $A + B$ परिभाषित नहीं है। उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A + B$ परिभाषित नहीं है।
2. हम देखते हैं कि आव्यूहों का योग, समान कोटि वाले आव्यूहों के समुच्चय में द्विआधारी संक्रिया का एक उदाहरण है।

3.4.2 *एक आव्यूह का एक अदिश से गुणन (Multiplication of a matrix by a scalar)*

अब मान लीजिए कि फ़ातिमा ने A पर स्थित फैक्ट्री में सभी मूल्य वर्ग के उत्पादन को दो गुना कर दिया है (संदर्भ 3.4.1)

A पर स्थित फैक्ट्री में उत्पादन की संख्या नीचे दिए आव्यूह में दिखलाई गई है।

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{लड़के} \quad \text{लड़कियाँ} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A पर स्थित फैक्ट्री में उत्पादित नयी (बदली हुई) संख्या अग्रलिखित है:

$$\begin{array}{c} \text{लड़के} \quad \text{लड़कियाँ} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

इसे आव्यूह रूप में, $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ प्रकार से निरूपित कर सकते हैं। हम देखते हैं कि यह नया आव्यूह पहले आव्यूह के प्रत्येक अवयव को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में हम, किसी आव्यूह के एक अदिश से गुणन को, निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं। यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक आव्यूह है तथा k एक अदिश है तो kA एक ऐसा आव्यूह है जिसे A के प्रत्येक अवयव को अदिश k से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

दूसरे शब्दों में, $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, अर्थात् kA का (i, j)वाँ अवयव, i तथा j के हर संभव मान के लिए, ka_{ij} होता है।

उदाहरण के लिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ है तो

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

आव्यूह का ऋण आव्यूह (Negative of a matrix) किसी आव्यूह A का ऋण आव्यूह $-A$ से निरूपित होता है। हम $-A$ को $-A = (-1)A$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, तो $-A$ निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

आव्यूहों का अंतर (Difference of matrices) यदि $A = [a_{ij}]$, तथा $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$ वाले दो आव्यूह हैं तो इनका अंतर $A - B$, एक आव्यूह $D = [d_{ij}]$ जहाँ i तथा j के समस्त

मानों के लिए $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ है, द्वारा परिभाषित होता है। दूसरे शब्दों में, D = A – B = A + (–1) B, अर्थात् आव्यूह A तथा आव्यूह – B का योगफल।

उदाहरण 7 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो 2A – B ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 आव्यूहों के योग के गुणधर्म *(Properties of matrix addition)*

आव्यूहों के योग की संक्रिया निम्नलिखित गुणधर्मों (नियमों) को संतुष्ट करती है:

(i) **क्रम-विनिमेय नियम (Commutative Law)** यदि $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$, वाले आव्यूह हैं, तो A + B = B + A होगा।

अब $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (संख्याओं का योग क्रम-विनिमेय है।)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) **साहचर्य नियम (Associative Law)** समान कोटि $m \times n$ वाले किन्हीं भी तीन आव्यूहों $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ के लिए (A + B) + C = A + (B + C)

अब $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (क्यों ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) **योग के तत्समक का अस्तित्व (Existence of additive identity)** मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ आव्यूह है और O एक $m \times n$ शून्य आव्यूह है, तो A+O = O+A= A होता है। दूसरे शब्दों में, आव्यूहों के योग संक्रिया का तत्समक शून्य आव्यूह O है।

(iv) **योग के प्रतिलोम का अस्तित्व (The existence of additive inverse)** मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक आव्यूह है, तो एक अन्य आव्यूह $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ इस प्रकार का है

कि A + (– A) = (– A) + A= O, अतएव आव्यूह – A, आव्यूह A का योग के अंतर्गत प्रतिलोम आव्यूह अथवा ऋण आव्यूह है।

3.4.4 एक आव्यूह के अदिश गुणन के गुणधर्म *(Properties of scalar multiplication of a matrix)*

यदि $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$, वाले दो आव्यूह हैं और k तथा l अदिश हैं, तो

(i) $k(A + B) = kA + kB$, (ii) $(k + l)A = kA + lA$

अब, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, और k तथा l अदिश हैं, तो

(i) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\,a_{ij}) + (k\,b_{ij})]$$

$$= [k\,a_{ij}] + [k\,b_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$$

(ii) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$

$$= [(k + l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] = kA + lA.$$

उदाहरण 8 यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3X = 5B$ दिया हो तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $2A + 3X = 5B$

या $2A + 3X - 2A = 5B - 2A$

या $2A - 2A + 3X = 5B - 2A$ (आव्यूह योग क्रम-विनिमेय है)

या $O + 3X = 5B - 2A$ (– 2A, आव्यूह 2A का योग प्रतिलोम है)

या $3X = 5B - 2A$ (O, योग का तत्समक है)

या $X = \frac{1}{3}(5B - 2A)$

या $$X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 9 X तथा Y, ज्ञात कीजिए, यदि $X+Y=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है।

हल यहाँ पर $(X + Y) + (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

या $(X + X) + (Y - Y) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

या $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

साथ ही $(X + Y) - (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

या $(X - X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

या $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

उदाहरण 10 निम्नलिखित समीकरण से x तथा y के मानों को ज्ञात कीजिए:

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

हल दिया है

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

या $2x + 3 = 7$ तथा $2y - 4 = 14$ (क्यों?)

या $2x = 7 - 3$ तथा $2y = 18$

या $x = \frac{4}{2}$ तथा $y = \frac{18}{2}$

अर्थात् $x = 2$ तथा $y = 9$

उदाहरण 11 दो किसान रामकिशन और गुरचरन सिंह केवल तीन प्रकार के चावल जैसे बासमती, परमल तथा नउरा की खेती करते हैं। दोनों किसानों द्वारा, सितंबर तथा अक्तूबर माह में, इस प्रकार के चावल की बिक्री (रुपयों में) को, निम्नलिखित A त था B आव्यूहों में व्यक्त किया गया है:

सितंबर माह की बिक्री (Rs में)

	बासमती	परमल	नउरा	
A =	10,000	20,000	30,000	रामकिशन
	50,000	30,000	10,000	गुरुचरण सिंह

अक्तूबर माह की बिक्री (Rs में)

	बासमती	परमल	नउरा	
A – B =	5000	10,000	24,000	रामकिशन
	30,000	20,000	0	गुरुचरण सिंह

(i) प्रत्येक किसान की प्रत्येक प्रकार के चावल की सितंबर तथा अक्तूबर की सम्मिलित बिक्री ज्ञात कीजिए।

(ii) सितंबर की अपेक्षा अक्तूबर में हुई बिक्री में कमी ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि दोनों किसानों को कुल बिक्री पर 2% लाभ मिलता है, तो अक्तूबर में प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर प्रत्येक किसान को मिलने वाला लाभ ज्ञात कीजिए।

हल

(i) प्रत्येक किसान की प्रत्येक प्रकार के चावल की सितंबर तथा अक्तूबर में प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री अगले पृष्ठ पर दी गई है:

$$A + B = \begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix}$$

(स्तंभ: बासमती, परमल, नउरा; पंक्तियाँ: रामकिशन, गुरुचरण सिंह)

(ii) सितंबर की अपेक्षा अक्तूबर में हुई बिक्री में कमी नीचे दी गई है,

$$A - B = \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix}$$

(स्तंभ: बासमती, परमल, नउरा; पंक्तियाँ: रामकिशन, गुरुचरण सिंह)

(iii) B का 2% $= \frac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

$$= 0.02 \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix}$$

(स्तंभ: बासमती, परमल, नउरा; पंक्तियाँ: रामकिशन, गुरुचरण सिंह)

$$= \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix}$$

(स्तंभ: बासमती, परमल, नउरा; पंक्तियाँ: रामकिशन, गुरुचरण सिंह)

अत: अक्तूबर माह में, रामकिशन, प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर क्रमश: ₹100, ₹200, तथा ₹120 लाभ प्राप्त करता है और गुरचरन सिंह, प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर क्रमश: ₹400, ₹200 तथा ₹200 लाभ अर्जित करता है।

3.4.5 *आव्यूहों का गुणन (Multiplication of matrices)*

मान लीजिए कि मीरा और नदीम दो मित्र हैं। मीरा 2 कलम तथा 5 कहानी की पुस्तकें खरीदना चाहती हैं, जब कि नदीम को 8 कलम तथा 10 कहानी की पुस्तकों की आवश्यकता है। वे दोनों एक दुकान पर (कीमत) ज्ञात करने के लिए जाते हैं, जो निम्नलिखित प्रकार है:

कलम – प्रत्येक ₹5, कहानी की पुस्तक – प्रत्येक ₹50 है।

उन दोनों में से प्रत्येक को कितनी धनराशि खर्च करनी पड़ेगी? स्पष्टतया, मीरा को ₹$(5 \times 2 + 50 \times 5)$ अर्थात्, ₹260 की आवश्यकता है, जबकि नदीम को ₹$(8 \times 5 + 50 \times 10)$ अर्थात् ₹540 की आवश्यकता है। हम उपर्युक्त सूचना को आव्यूह निरूपण में इस प्रकार से प्रकट कर सकते हैं:

आवश्यकता	प्रति नग दाम (रुपयों में)	आवश्यक धनराशि (रुपयों में)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 \\ 8\times5+10\times50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

मान लीजिए कि उनके द्वारा किसी अन्य दुकान पर ज्ञात करने पर भाव निम्नलिखित प्रकार हैं:

कलम - प्रत्येक ₹4, कहानी की पुस्तक - प्रत्येक ₹40

अब, मीरा तथा नदीम द्वारा खरीदारी करने के लिए आवश्यक धनराशि क्रमश: ₹$(4\times2+40\times5)$ = ₹ 208 तथा ₹$(8\times4+10\times40)$ = ₹432 है।

पुन: उपर्युक्त सूचना को निम्नलिखित ढंग से निरूपित कर सकते हैं:

आवश्यकता	प्रति नग दाम (रुपयों में)	आवश्यक धनराशि (रुपयों में)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\times2+40\times5 \\ 8\times4+10\times40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

अब, उपर्युक्त दोनों दशाओं में प्राप्त सूचनाओं को एक साथ आव्यूह निरूपण द्वारा निम्नलिखित प्रकार से प्रकट कर सकते हैं:

आवश्यकता	प्रति नग दाम (रुपयों में)	आवश्यक धनराशि (रुपयों में)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 & 4\times2+40\times5 \\ 8\times5+10\times50 & 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त विवरण आव्यूहों के गुणन का एक उदाहरण है। हम देखते हैं कि आव्यूहों A तथा B के गुणन के लिए, A में स्तंभों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर होनी चाहिए। इसके अतिरिक्त गुणनफल आव्यूह (Product matrix) के अवयवों को प्राप्त करने के लिए, हम A की पंक्तियों तथा B के स्तंभों को लेकर, अवयवों के क्रमानुसार (Element–wise) गुणन करते हैं और तदोपरांत इन गुणनफलों का योगफल ज्ञात करते हैं। औपचारिक रूप से, हम आव्यूहों के गुणन को निम्नलिखित तरह से परिभाषित करते हैं:

दो आव्यूहों A तथा B का गुणनफल परिभाषित होता है, यदि A में स्तंभों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के समान होती है। मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और $B = [b_{jk}]$ एक $n \times p$ कोटि का आव्यूह है। तब आव्यूहों A तथा B का गुणनफल एक $m \times p$ कोटि का आव्यूह C होता है। आव्यूह C का (i, k)वाँ अवयव c_{ik} प्राप्त करने के लिए हम A की i वीं पंक्ति और B के kवें स्तंभ को लेते है और फिर उनके अवयवों का क्रमानुसार गुणन करते हैं। तदोपरान्त इन सभी गुणनफलों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं। दूसरे शब्दों में यदि,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ है तो A की i वीं पंक्ति $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ तथा B का kवाँ स्तंभ

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$ हैं, तब $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

आव्यूह $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, A तथा B का गुणनफल है।

उदाहरण के लिए, यदि $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ है तो

गुणनफल CD परिभाषित है तथा $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ एक 2×2 आव्यूह है जिसकी प्रत्येक प्रविष्टि C की किसी पंक्ति की प्रविष्टियों की D के किसी स्तंभ की संगत प्रविष्टियों के गुणनफलों के योगफल के बराबर होती है। इस उदाहरण में यह चारों परिकलन निम्नलिखित हैं,

प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$

प्रथम पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7) + (-1)(1) + 2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$

दूसरी पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2) + 3(-1) + 4(5) & ? \end{bmatrix}$

दूसरी पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7) + 3(1) + 4(-4) \end{bmatrix}$

अत: $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

उदहारण 12 यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ है तो AB ज्ञात कीजिए।

हल आव्यूह A में 2 स्तंभ हैं जो आव्यूह B की पंक्तियों के समान हैं। अतएव AB परिभाषित है। अब

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

> **टिप्पणी** यदि AB परिभाषित है तो यह आवश्यक नहीं है कि BA भी परिभाषित हो। उपर्युक्त उदाहरण में AB परिभाषित है परंतु BA परिभाषित नहीं है क्योंकि B में 3 स्तंभ हैं जबकि A में केवल 2 पंक्तियाँ (3 पंक्तियाँ नहीं) हैं। यदि A तथा B क्रमश: $m \times n$ तथा $k \times l$ कोटियों के आव्यूह हैं तो AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं **यदि और केवल यदि** $n = k$ तथा $l = m$ हो। विशेष रूप से, यदि A और B दोनों ही समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं, तो AB तथा BA दोनों परिभाषित होते हैं।

आव्यूहों के गुणन की अक्रम-विनिमेयता (Non-Commutativity of multiplication of matrices)

अब हम एक उदाहरण के द्वारा देखेंगे कि, यदि AB तथा BA परिभाषित भी हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि AB = BA हो।

उदाहरण 13 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि $AB \neq BA$

हल क्योंकि कि A एक 2×3 आव्यूह है और B एक 3×2 आव्यूह है, इसलिए AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं तथा क्रमश: 2×2 तथा 3×3, कोटियों के आव्यूह हैं। नोट कीजिए कि

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

और $$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

स्पष्टतया $AB \neq BA$.

उपर्युक्त उदाहरण में AB तथा BA भिन्न-भिन्न कोटियों के आव्यूह हैं और इसलिए $AB \neq BA$ है। परंतु कोई ऐसा सोच सकता है कि यदि AB तथा BA दोनों समान कोटि के होते तो संभवतः वे समान होंगे। किंतु ऐसा भी नहीं है। यहाँ हम एक उदाहरण यह दिखलाने के लिए दे रहे हैं कि यदि AB तथा BA समान कोटि के हों तो भी यह आवश्यक नहीं है कि वे समान हों।

उदाहरण 14 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

और $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ है। स्पष्टतया $AB \neq BA$ है।

अतः आव्यूह गुणन क्रम-विनिमेय नहीं होता है।

टिप्पणी इसका तात्पर्य यह नहीं है कि A तथा B आव्यूहों के उन सभी युग्मों के लिए, जिनके लिए AB तथा BA परिभाषित है, $AB \neq BA$ होगा। उदाहरण के लिए

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, तो $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ध्यान दीजिए कि समान कोटि के विकर्ण आव्यूहों का गुणन क्रम-विनिमेय होता है।

दो शून्येतर आव्यूहों के गुणनफल के रूप में शून्य आव्यूहः (Zero matrix as the product of two non-zero matrices)

हमें ज्ञात है कि दो वास्तविक संख्याओं a तथा b के लिए, यदि $ab = 0$ है तो या तो $a = 0$ अथवा $b = 0$ होता है। किंतु आव्यूहों के लिए यह अनिवार्यतः सत्य नहीं होता है। इस बात को हम एक उदाहरण द्वारा देखेंगे।

उदाहरण 15 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है तो AB का मान ज्ञात कीजिए

हल यहाँ पर $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अतः यदि दो आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह है तो आवश्यक नहीं है कि उनमें से एक आव्यूह अनिवार्यतः शून्य आव्यूह हो।

3.4.6 *आव्यूहों के गुणन के गुणधर्म (Properties of multiplication of matrices)*

आव्यूहों के गुणन के गुणधर्मों का हम नीचे बिना उनकी उपपत्ति दिए उल्लेख कर रहे हैं:

1. **साहचर्य नियमः** किन्हीं भी तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए

   $(AB)\, C = A\, (BC)$, जब कभी समीकरण के दोनों पक्ष परिभाषित होते हैं।

2. **वितरण नियम :** किन्हीं भी तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए

   (i) A (B+C) = AB + AC

   (ii) (A+B) C = AC + BC, जब भी समीकरण के दोनों पक्ष परिभाषित होते हैं।

3. **गुणन के तत्समक का अस्तित्व :** प्रत्येक वर्ग आव्यूह A के लिए समान कोटि के एक आव्यूह I का अस्तित्व इस प्रकार होता है, कि IA = AI = A

अब हम उदाहरणों के द्वारा उपर्युक्त गुणधर्मों का सत्यापन करेंगे।

उदाहरण 16 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ तो A(BC) तथा (AB)C ज्ञात कीजिए और दिखलाइए कि (AB)C = A(BC) है।

हल यहाँ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$

$$(AB)\ (C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

अब $$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

अतएव $$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

स्पष्टतया, (AB) C = A (BC)

उदाहरण 17 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

तो AC, BC तथा (A + B)C का परिकलन कीजिए। यह भी सत्यापित कीजिए कि (A + B) C = AC + BC

हल $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

अतएव, $$(A + B)\,C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

इसके अतिरिक्त $$AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

और $$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

स्पष्टतया $(A + B)\, C = AC + BC$

उदाहरण 18 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^3 - 23A - 40I = O$

हल हम जानते हैं कि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

इसलिए $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

अब $$A^3 - 23A - 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

उदाहरण 19 किसी विधान सभा चुनाव के दौरान एक राजनैतिक दल ने अपने उम्मीदवार के प्रचार हेतु एक जन संपर्क फर्म को ठेके पर अनुबंद्धित किया। प्रचार हेतु तीन विधियों द्वारा संपर्क स्थापित करना निश्चित हुआ। ये हैं: टेलीफोन द्वारा, घर-घर जाकर तथा पर्चा वितरण द्वारा। प्रत्येक संपर्क का शुल्क (पैसों में) नीचे आव्यूह A में व्यक्त है,

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{टेलीफोन द्वारा} \\ \text{घर जाकर} \\ \text{पर्चा द्वारा} \end{matrix}$$

(स्तंभ शीर्षक: प्रति संपर्क मूल्य)

X तथा Y दो शहरों में, प्रत्येक प्रकार के सम्पर्कों की संख्या आव्यूह

(स्तंभ शीर्षक: टेलीफोन, घर जाकर, पर्चा द्वारा)

$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

में व्यक्त है। X तथा Y शहरों में राजनैतिक दल द्वारा व्यय की गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

अत: दल द्वारा दोनों शहरों में व्यय की गई कुल धनराशि क्रमश: 3,40,000 पैसे व 7,20,000 पैसे अर्थात् Rs 3400 तथा Rs 7200 हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) A + B (ii) A – B (iii) 3A – C

(iv) AB (v) BA

2. निम्नलिखित को परिकलित कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, तो (A+B) तथा (B – C) परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि $A + (B - C) = (A + B) - C$.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, तो $3A - 5B$ परिकलित कीजिए।

6. सरल कीजिए, $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

7. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ तथा $X \quad Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ तथा $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

8. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

9. x तथा y ज्ञात कीजिए यदि $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$

10. प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix}x & z\\ y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

11. यदि $x\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$ है तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

13. यदि $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x+y)$

14. दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो तो k ज्ञात कीजिए।

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है। तो सिद्ध कीजिए

कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

19. किसी व्यापार संघ के पास 30,000 रुपयों का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बांडों में निवेशित करना है। प्रथम बांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30,000 रुपयों के कोष को दो प्रकार के बांडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज

(a) Rs 1800 हो। (b) Rs 2000 हो।

20. किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः Rs 80, Rs 60 तथा Rs 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

मान लीजिए कि X, Y, Z, W तथा P क्रमशः $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ तथा $p \times k$, कोटियों के आव्यूह हैं। नीचे दिए प्रश्न संख्या 21 तथा 22 में सही उत्तर चुनिए।

21. PY + WY के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबंध होगा?

(A) $k = 3, p = n$ (B) k स्वेच्छ है , $p = 2$

(C) p स्वेच्छ है, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. यदि $n = p$, तो आव्यूह 7X – 5Z की कोटि है।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. आव्यूह का परिवर्त (Transpose of a Matrix)

इस अनुच्छेद में हम किसी आव्यूह के परिवर्त तथा कुछ विशेष प्रकार के आव्यूहों, जैसे सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) तथा विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) के बारे में जानेंगे।

परिभाषा 3 यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है तो A की पंक्तियों तथा स्तंभों का परस्पर विनिमय (Interchange) करने से प्राप्त होने वाला आव्यूह A *का परिवर्त* (Transpose) कहलाता है। आव्यूह A के परिवर्त को A′ (या A^T) से निरूपित करते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, तो $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ होगा। उदाहरणार्थ, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ हो तो } A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ होगा।}$$

आव्यूहों के परिवर्त के गुणधर्म (Properties of transpose of matrices)

अब हम किसी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह के निम्नलिखित गुणधर्मो को बिना उपपत्ति दिए व्यक्त करते हैं। इनका सत्यापन उपयुक्त उदाहरणों द्वारा किया जा सकता हैं। उपयुक्त कोटि के किन्हीं आव्यूहों A तथा B के लिए

(i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (जहाँ k कोई अचर है।)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$

उदाहरण 20 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$, जहाँ k कोई अचर है।

हल

(i) यहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

अतः $(A')' = A$

(ii) यहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अतएव $$(A+B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अब $$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

अतएव $$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अतः $(A+B)' = A' + B'$

(iii) यहाँ

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

तब $$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

अतः $(kB)' = kB'$

उदाहरण 21 यदि $A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए $(AB)' = B'A'$ है।

हल यहाँ

$$A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

इसलिए $$AB = \begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -6 & 12\\4 & 12 & -24\\5 & 15 & -30\end{bmatrix}$$

अतः $$(AB)' = \begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\-6 & 12 & 15\\12 & -24 & -30\end{bmatrix}$$

अब $$A' = [-2\ \ 4\ \ 5],\ B' = \begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}$$

इसलिए $$B'A' = \begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\-6 & 12 & 15\\12 & -24 & -30\end{bmatrix} = (AB)'$$

स्पष्टतया $(AB)' = B'A'$

3.6 सममित तथा विषम सममित आव्यूह (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

परिभाषा 4 एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ *सममित* कहलाता है यदि $A' = A$ अर्थात् i व j के हर संभव मानों के लिए $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ हो।

उदाहरण के लिए, $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2 & 3\\2 & -1.5 & -1\\3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है, क्योंकि $A' = A$

परिभाषा 5 एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ *विषम सममित आव्यूह* कहलाता है, यदि $A' = -A$, अर्थात् i तथा j के हर संभव मानों के लिए $a_{ji} = -a_{ij}$ हो। अब, यदि हम $i = j$ रखें, तो $a_{ii} = -a_{ii}$ होगा। अतः $2a_{ii} = 0$ या $a_{ii} = 0$ समस्त i के लिए।

इसका अर्थ यह हुआ कि किसी विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं। उदाहरणार्थ आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है, क्योंकि $B' = -B$ है।

अब, हम सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के कुछ गुणधर्मों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए $A + A'$ एक सममित आव्यूह तथा $A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह होते हैं।

उपपत्ति मान लीजिए कि $B = A + A'$ तब

$$B' = (A + A')'$$

$$= A' + (A')' \quad (\text{क्योंकि } (A + B)' = (A' + B'))$$

$$= A' + A \quad (\text{क्योंकि } (A')' = A)$$

$$= A + A' \quad (\text{क्योंकि } A + B = B + A)$$

$$= B$$

इसलिए $B = A + A'$ एक सममित आव्यूह है।

अब मान लीजिए कि $C = A - A'$

$$C' = (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{क्यों?})$$

$$= A' - A \quad (\text{क्यों?})$$

$$= -(A - A') = -C$$

अतः $C = A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रमेय 2 किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि A एक वर्ग आव्यूह है। हम लिख सकते हैं कि

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

प्रमेय 1 द्वारा हमें ज्ञात है कि $(A + A')$ एक सममित आव्यूह तथा $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है। क्योंकि किसी भी आव्यूह A के लिए $(kA)' = kA'$ होता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\frac{1}{2}(A + A')$ सममित आव्यूह तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ विषम सममित आव्यूह है। अतः किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 22 आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल यहाँ $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

मान लीजिए कि $$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ है।

अब $$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

अतः $$P = \frac{1}{2}(B + B')$$ एक सममित आव्यूह है।

साथ ही मान लीजिए $$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ है।

तब $$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

अत: $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अब $$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

अत: आव्यूह B एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त किया गया।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

3. यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

4. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए।

5. A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$, जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

7. (i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

8. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।
(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 में सही उत्तर चुनिए:

11. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB – BA एक

(A) विषम सममित आव्यूह है (B) सममित आव्यूह है

(C) शून्य आव्यूह है (D) तत्समक आव्यूह है

12. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)

परिभाषा 6 यदि A, कोटि m, का, एक वर्ग आव्यूह है और यदि एक अन्य वर्ग आव्यूह का अस्तित्व इस प्रकार है, कि AB = BA = I, तो B को आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं और इसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। ऐसी दशा में आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह हैं।

अब $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

साथ ही $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ है। अत: B आव्यूह, A का व्युत्क्रम है।

दूसरे शब्दों में, $B = A^{-1}$ तथा A आव्यूह B, का व्युत्क्रम है, अर्थात् $A = B^{-1}$

टिप्पणी

1. किसी आयताकार (Rectangular) आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह नहीं होता है, क्योंकि गुणनफल AB तथा BA के परिभाषित होने और समान होने के लिए, यह अनिवार्य है कि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों।
2. यदि B, आव्यूह A का व्युत्क्रम है, तो A, आव्यूह B का व्युत्क्रम होता है।

प्रमेय 3 [व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता (Uniqueness of inverse)] किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है तो अद्वितीय होता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ कोटि m का, एक वर्ग आव्यूह है। यदि संभव हो, तो मान लीजिए B तथा C आव्यूह A के दो व्युत्क्रम आव्यूह हैं। अब हम दिखाएँगें कि B = C है।

क्योंकि आव्यूह A का व्युत्क्रम B है

अतः $$AB = BA = I \qquad \text{... (1)}$$

क्योंकि आव्यूह A का व्युत्क्रम C भी है अतः

$$AC = CA = I \qquad \text{... (2)}$$

अब $$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C$$

प्रमेय 4 यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

उपपत्ति एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह की परिभाषा से

$$(AB)\,(AB)^{-1} = 1$$

या $$A^{-1}\,(AB)\,(AB)^{-1} = A^{-1}I$$ (A^{-1} का दोनों पक्षों से पूर्वगुणन करने पर)

या $$(A^{-1}A)\,B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$ ($A^{-1}I = A^{-1}$, तथा आव्यूह गुणन साहचर्य होता है)

या $$IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

या $$B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

या $$B^{-1}\,B\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

या $$I\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

अतः $$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

1. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(A) AB = BA (B) AB = BA = 0

(C) AB = 0, BA = I (D) AB = BA = I

विविध उदाहरण

उदाहरण 23 यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो दर्शाइए कि AB सममित है, यदि और केवल यदि A तथा B क्रमविनिमेय है, अर्थात् AB = BA है।

हल दिया है कि A तथा B दोनों सममित आव्यूह हैं, इसलिए $A' = A$ तथा $B' = B$ है।

मान लीजिए कि AB सममित है तो $(AB)' = AB$

किंतु $$(AB)' = B'A' = BA \text{ (क्यों?)}$$

अतः $$BA = AB$$

विलोमतः, यदि $AB = BA$ है तो हम सिद्ध करेंगे कि AB सममित है।

अब $$(AB)' = B'A'$$
$$= B\,A \text{ (क्योंकि A तथा B सममित हैं)}$$
$$= AB$$

अतः AB सममित है।

उदाहरण 24 मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है। एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = O$ हो।

हल क्योंकि A, B, C सभी कोटि 2, के वर्ग आव्यूह हैं और $CD - AB$ भली-भाँति परिभाषित है, इसलिए D कोटि 2 का एक वर्ग आव्यूह होना चाहिए।

मान लीजिए कि $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ है। तब $CD - AB = O$ से प्राप्त होता है कि

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

या $$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

आव्यूहों की समानता से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं:

$$2a + 5c - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$
$$3a + 8c - 43 = 0 \quad \ldots (2)$$
$$2b + 5d = 0 \quad \ldots (3)$$
तथा $$3b + 8d - 22 = 0 \quad \ldots (4)$$

(1) तथा (2), को सरल करने पर $a = -191, c = 77$ प्राप्त होता है।

(3) तथा (4), को सरल करने पर $b = -110, d = 44$ प्राप्त होता है।

अतः $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

1. यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है।

2. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह B′ AB सममित अथवा विषम सममित है यदि A सममित अथवा विषम सममित है।

3. $x, y,$ तथा z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A = I$ को संतुष्ट करता है।

4. x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ है ?

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है।

6. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

7. एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ $x, y,$ तथा z का उत्पादन करता है जिन का वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओं की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निर्दर्शित) है:

बाज़ार	उत्पादन		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः Rs 2.50, Rs 1.50 तथा Rs 1.00 है तो प्रत्येक बाज़ार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(b) यदि उपर्युक्त तीन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमशः Rs 2.00, Rs 1.00 तथा पैसे 50 है तो कुल लाभ (Gross profit) ज्ञात कीजिए।

8. आव्यूह X ज्ञात कीजिए, यदि $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ है।

निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए:

9. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

10. यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही है तो:

(A) A एक विकर्ण आव्यूह है। (B) A एक शून्य आव्यूह है।

(C) A एक वर्ग आव्यूह है। (D) इनमें से कोई नहीं।

11. यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है:

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

सारांश

- आव्यूह, फलनों या संख्याओं का एक आयताकार क्रम-विन्यास है।
- m पंक्तियों तथा n स्तंभों वाले आव्यूह को $m \times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ एक स्तंभ आव्यूह है।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ एक पंक्ति आव्यूह है।
- एक $m \times n$ आव्यूह एक वर्ग आव्यूह है, यदि $m = n$ है।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ एक विकर्ण आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक अदिश आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$, $a_{ij} = k$, (k एक अचर है), जब $i = j$ है।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक तत्समक आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 1$ जब $i = j$ तथा $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$ है।
- किसी शून्य आव्यूह (या रिक्त आव्यूह) के सभी अवयव शून्य होते हैं।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ यदि (i) A तथा B समान कोटि के हैं तथा (ii) i तथा j के समस्त संभव मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, जहाँ A, B तथा C समान कोटि के आव्यूह हैं।
- $k(A + B) = kA + kB$, जहाँ A तथा B समान कोटि के आव्यूह है तथा k एक अचर है।
- $(k + l)A = kA + lA$, जहाँ k तथा l अचर हैं।
- यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तथा $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ तो $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, जहाँ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ है।
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तो A' या $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$
- यदि $A' = A$ है तो A एक सममित आव्यूह है।
- यदि $A' = -A$ है तो A एक विषम सममित आव्यूह है।
- किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित और एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में निरूपित किया जा सकता है।
- यदि A तथा B दो वर्ग आव्यूह हैं, इस प्रकार कि $AB = BA = I$, तो आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह B है, जिसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं और आव्यूह B का व्यूत्क्रम A है।
- वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है, अद्वितीय होता है।

12081CH04

अध्याय 4

सारणिक (Determinants)

❖*All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 भूमिका (Introduction)

P.S. Laplace
(1749-1827)

पिछले अध्याय में, हमने आव्यूह और आव्यूहों के बीजगणित के विषय में अध्ययन किया है। हमने बीजगणितीय समीकरणों के निकाय को आव्यूहों के रूप में व्यक्त करना भी सीखा है। इसके अनुसार रैखिक समीकरणों के निकाय

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

को $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अब इन समीकरणों के निकाय का अद्वितीय हल है अथवा नहीं, इसको $a_1 b_2 - a_2 b_1$ संख्या द्वारा ज्ञात किया जाता है। (स्मरण कीजिए कि यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ या $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, हो तो समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय होता है) यह संख्या $a_1 b_2 - a_2 b_1$ जो समीकरणों के निकाय के अद्वितीय हल ज्ञात करती है, वह आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ से संबंधित है और इसे A का **सारणिक या det A** कहते हैं। सारणिकों का इंजीनियरिंग, विज्ञान, अर्थशास्त्र, सामाजिक विज्ञान इत्यादि में विस्तृत अनुप्रयोग हैं।

इस अध्याय में, हम केवल वास्तविक प्रविष्टियों के 3 कोटि तक के सारणिकों पर विचार करेंगे। इस अध्याय में सारणिकों के गुण धर्म, उपसारणिक, सह-खण्ड और त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सारणिकों का अनुप्रयोग, एक वर्ग आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम, रैखिक समीकरण के निकायों

की संगतता और असंगतता और एक आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग कर दो अथवा तीन चरांकों के रैखिक समीकरणों के हल का अध्ययन करेंगे।

4.2 सारणिक (Determinant)

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) द्वारा संबंधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं। इसे एक फलन की तरह सोचा जा सकता है जो प्रत्येक आव्यूह को एक अद्वितीय संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) से संबंधित करता है।

यदि M वर्ग आव्यूहों का समुच्चय है, k सभी संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) का समुच्चय है और $f: M \to K, f(A) = k$, के द्वारा परिभाषित है जहाँ $A \in M$ और $k \in K$ तब $f(A)$, A का सारणिक कहलाता है। इसे $|A|$ या det (A) या Δ के द्वारा भी निरूपित किया जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, तो A के सारणिक को $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = det (A) द्वारा लिखा जाता है।

टिप्पणी

(i) आव्यूह A के लिए, $|A|$ को A का सारणिक पढ़ते हैं।

(ii) केवल वर्ग आव्यूहों के सारणिक होते हैं।

4.2.1 *एक कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order one)*

माना एक कोटि का आव्यूह $A = [a]$ हो तो A के सारणिक को a के बराबर परिभाषित किया जाता है।

4.2.2 *द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order two)*

माना 2×2 कोटि का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ है।

तो A के सारणिक को इस प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है:

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

उदाहरण 1 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$

उदाहरण 2 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) \;= x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

4.2.3 3 × 3 कोटि के आव्यूह का सारणिक (*Determinant of a matrix of order 3 × 3*)

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के सारणिक को छः प्रकार से प्रसारित किया जाता है तीनों पंक्तियों (R_1, R_2 तथा R_3) में से प्रत्येक के संगत और तीनों स्तंभ (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत दर्शाए गए प्रसरण समान परिणाम देते हैं जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में स्पष्ट किया गया है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, के सारणिक पर विचार करते हैं।

जहाँ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति (R_1) के अनुदिश प्रसरण

$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

चरण 1 R_1 के पहले अवयव a_{11} को $(-1)^{(1+1)}$ $[(-1)^{a_{11} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) तथा पहला स्तंभ (C_1) के अवयवों को हटाने से प्राप्त द्वितीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए क्योंकि a_{11}, R_1 और C_1 में स्थित है

अर्थात् $$(-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 2 क्योंकि a_{12}, R_1 तथा C_2 में स्थित है इसलिए R_1 के दूसरे अवयव a_{12} को $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) व दूसरे स्तंभ (C_2) को हटाने से प्राप्त द्वितीय क्रम के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 3 क्योंकि a_{13}, R_1 तथा C_3 में स्थित है इसलिए R_1 के तीसरे अवयव को $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) व तीसरे स्तंभ (C_3) को हटाने से प्राप्त तृतीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात्
$$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

चरण 4 अब A का सारणिक अर्थात् | A | के व्यंजक को उपरोक्त चरण 1, 2 व 3 से प्राप्त तीनों पदों का योग करके लिखिए अर्थात्

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

या
$$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \ldots (1)$$

टिप्पणी हम चारों चरणों का एक साथ प्रयोग करेंगे।

द्वितीय पंक्ति (R_2) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 के अनुदिश प्रसरण करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}) - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12})$$
$$|A| = - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{22} a_{11} a_{33} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{23} a_{11} a_{32} + a_{23} a_{31} a_{12}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \ldots (2)$$

पहले स्तंभ (C_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1, के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$|A| = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\ a_{31}\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\ (a_{22}\ a_{33} - a_{23}\ a_{32}) - a_{21}\ (a_{12}\ a_{33} - a_{13}\ a_{32}) + a_{31}\ (a_{12}\ a_{23} - a_{13}\ a_{22})$$

$$|A| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{21}\ a_{12}\ a_{33} + a_{21}\ a_{13}\ a_{32} + a_{31}\ a_{12}\ a_{23} - a_{31}\ a_{13}\ a_{22}$$

$$= a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{13}\ a_{31}\ a_{22} \quad \ldots (3)$$

(1), (2) और (3) से स्पष्ट है कि $|A|$ का मान समान है। यह पाठकों के अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है कि वे यह सत्यापित करें कि $|A|$ का R_3, C_2 और C_3 के अनुदिश प्रसरण (1), (2) और (3) से प्राप्त परिणामों के समान है।

अत: एक सारणिक को किसी भी पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर समान मान प्राप्त होता है।

टिप्पणी

(i) गणना को सरल करने के लिए हम सारणिक का उस पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करेंगे जिसमें शून्यों की संख्या अधिकतम होती है।

(ii) सारणिकों का प्रसरण करते समय $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने के स्थान पर, हम $(i+j)$ के सम या विषम होने के अनुसार +1 या –1 से गुणा कर सकते हैं।

(iii) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ तो यह सिद्ध करना सरल है कि $A = 2B$. किंतु $|A| = 0 - 8 = -8$ और $|B| = 0 - 2 = -2$ है।

अवलोकन कीजिए कि $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ या $|A| = 2^n|B|$, जहाँ $n = 2$, वर्ग आव्यूहों A व B की कोटि है।

व्यापक रूप में, यदि $A = kB$, जहाँ A व B वर्ग आव्यूहों की कोटि n है, तब $|A| = k^n|B|$, जहाँ $n = 1, 2, 3$ है।

उदाहरण 3 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि तीसरे स्तंभ में दो प्रविष्टियाँ शून्य हैं। इसलिए तीसरे स्तंभ (C_3) के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

उदाहरण 4 $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

अर्थात् $\quad 3 - x^2 = 3 - 8$

अर्थात् $\quad x^2 = 8$

अतः $\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 से 2 तक में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

5. निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, हो तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

7. x के मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है:

(A) 6 (B) ± 6 (C) – 6 (D) 0

4.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

हमने पिछली कक्षाओं में सीखा है कि एक त्रिभुज जिसके शीर्षबिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3), हों तो उसका क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब इस व्यंजक को सारणिक के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots (1)$$

टिप्पणी

(i) क्योंकि क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है इसलिए हम सदैव (1) में सारणिक का निरपेक्ष मान लेते हैं।

(ii) यदि क्षेत्रफल दिया हो तो गणना के लिए सारणिक का धनात्मक और ऋणात्मक दोनों मानों का प्रयोग कीजिए।

(iii) तीन संरेख बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

उदाहरण 6 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (– 4, 2) और (5, 1) हैं।

हल त्रिभुज का क्षेत्रफल:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3+72-14) = \frac{61}{2}$$

उदाहरण 7 सारणिकों का प्रयोग करके A(1, 3) और B (0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक बिंदु D(k, 0) इस प्रकार है कि Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

हल मान लीजिए AB पर कोई बिंदु P (x, y) है तब Δ ABP का क्षेत्रफल = 0 (क्यों?)

इसलिए $$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

इससे प्राप्त है $$\frac{1}{2}(y-3x) = 0 \text{ या } y = 3x$$

जो अभीष्ट रेखा AB का समीकरण है।

किंतु Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अतः

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ हमें प्राप्त है } \frac{-3k}{2} = \pm 3 \text{, i.e., } k = \quad 2$$

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. दर्शाइए कि बिंदु A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ और C $(c, a + b)$ संरेख हैं।

3. प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुजों का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिंदु निम्नलिखित हैं:

(i) $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), $(0, k)$

4. (i) सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है:

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.4 उपसारणिक और सहखंड (Minor and Co-factor)

इस अनुच्छेद में हम उपसारणिकों और सहखंडों का प्रयोग करके सारणिको के प्रसरण का विस्तृत रूप लिखना सीखेंगे।

परिभाषा 1 सारणिक के अवयव a_{ij} का उपसारणिक एक सारणिक है जो i वी पंक्ति और j वाँ स्तंभ जिसमें अवयव a_{ij} स्थित है, को हटाने से प्राप्त होता है। अवयव a_{ij} के उपसारणिक को M_{ij} के द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी $n(n \geq 2)$ क्रम के सारणिक के अवयव का उपसारणिक $n - 1$ क्रम का सारणिक होता है।

उदाहरण 8 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि 6 दूसरी पंक्ति एवं तृतीय स्तंभ में स्थित है। इसलिए इसका उपसारणिक $= M_{23}$ निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ (}\Delta \text{ से } R_2 \text{ और } C_3 \text{ हटाने पर)}$$

परिभाषा 2 एक अवयव a_{ij} का सहखंड जिसे A_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं, जहाँ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

के द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

उदाहरण 9 सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहाँ $a_{11} = 1$, इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक $= 3$

$M_{12} =$ अवयव a_{12} का उपसारणिक $= 4$

$M_{21} =$ अवयव a_{21} का उपसारणिक $= -2$

$M_{22} =$ अवयव a_{22} का उपसारणिक $= 1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$$

उदाहरण 10 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के अवयवों a_{11} तथा a_{21} के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल उपसारणिक और सहखंड की परिभाषा द्वारा हम पाते हैं:

$$a_{11} \text{ का उपसारणिक } = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

$$a_{11} \text{ का सहखंड } = A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

$$a_{21} \text{ का उपसारणिक } = M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}$$

$$a_{21} \text{ का सहखंड } = A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\,(a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) = -\, a_{12}\, a_{33} + a_{13}\, a_{32}$$

टिप्पणी उदाहरण 21 में सारणिक **Δ** का R_1 के सापेक्ष प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}$, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} हैं।

$= R_1$ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग।

इसी प्रकार Δ का R_2, R_3, C_1, C_2 और C_3 के अनुदिश 5 प्रसरण अन्य प्रकार से हैं।

अत: सारणिक Δ, किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग है।

टिप्पणी यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है। उदाहरणतया, माना $\Delta = a_{11}\, A_{21} + a_{12}\, A_{22} + a_{13}\, A_{23}$ तब:

$$\Delta = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ (क्योंकि } R_1 \text{ और } R_2 \text{ समान हैं)}$$

इसी प्रकार हम अन्य पंक्तियों और स्तंभों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

उदाहरण 11 सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$ है।

हल यहाँ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$; इसलिए $A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46$; इसलिए $A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30$; इसलिए $A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4$; इसलिए $A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19$; इसलिए $A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$; इसलिए $A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12$; इसलिए $A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22$; इसलिए $A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$

और $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18$; इसलिए $A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$

अब $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5$; तथा $A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$ है।

इसलिए $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

प्रश्नावली 4.3

निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड लिखिए।

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखंड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$ (B) $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31}$

(C) $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ (D) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$

4.5 आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम (Adjoint and Inverse of a Matrix)

पिछले अध्याय में हमने एक आव्यूह के व्युत्क्रम का अध्ययन किया है। इस अनुच्छेद में हम एक आव्यूह के व्युत्क्रम के अस्तित्व के लिए शर्तों की भी व्याख्या करेंगे।

A^{-1} ज्ञात करने के लिए पहले हम एक आव्यूह का सहखंडज परिभाषित करेंगे।

4.5.1 *आव्यूह का सहखंडज (Adjoint of a matrix)*

परिभाषा 3 एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ का सहखंडज, आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित है, जहाँ A_{ij}, अवयव a_{ij} का सहखंड है। आव्यूह A के सहखंडज को *adj* A के द्वारा व्यक्त करते हैं।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ है।

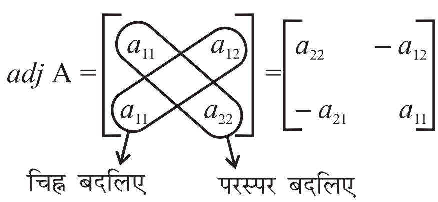
तब $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है।

उदाहरण 12 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

अतः $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी 2×2 कोटि के वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सहखंडज $adj\ A$, a_{11} और a_{22} को परस्पर बदलने एवं a_{12} और a_{21} के चिह्न परिवर्तित कर देने से भी प्राप्त किया जा सकता है जैसा नीचे दर्शाया गया है।



हम बिना उपपत्ति के निम्नलिखित प्रमेय निर्दिष्ट करते हैं।

प्रमेय 1 यदि A कोई n कोटि का आव्यूह है तो, $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\,I$, जहाँ I, n कोटि का तत्समक आव्यूह है।

सत्यापनः मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ है तब } adj\, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

क्योंकि एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों का संगत सहखंडों की गुणा का योग |A| के समान होता है अन्यथा शून्य होता है।

इस प्रकार $$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $(adj\ A)\ A = |A|\ I$

अतः $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$ सत्यापित है।

परिभाषा 4 एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय (singular) कहलाता है यदि $|A| = 0$ है।

उदाहरण के लिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्य है। अतः A अव्युत्क्रमणीय है।

परिभाषा 5 एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहलाता है यदि $|A| \neq 0$

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ है।

अतः A व्युत्क्रमणीय है।

हम निम्नलिखित प्रमेय बिना उपपत्ति के निर्दिष्ट कर रहे हैं।

प्रमेय 2 यदि A तथा B दोनों एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो AB तथा BA भी उसी कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह होते हैं।

प्रमेय 3 आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमशः सारणिकों के गुणनफल के समान होता है अर्थात् $|AB| = |A|\ |B|$, जहाँ A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं।

टिप्पणी हम जानते हैं कि $(adj\ A)\ A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

दोनों ओर आव्यूहों का सारणिक लेने पर,

$$|(adj\, A)\, A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(क्यों?)}$$

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

अर्थात् $$|(adj\ A)| = |A|^2$$

व्यापक रुप से, यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो $|adj\, A| = |A|^{n-1}$ होगा।

प्रमेय 4 एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है, यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

उपपत्ति मान लीजिए n कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह A है और n कोटि का तत्समक आव्यूह I है। तब n कोटि के एक वर्ग आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि AB = BA = I

अब AB = I है तो $|AB| = |I|$ या $|A|\,|B| = 1$ (क्योंकि $|I| = 1, |AB| = |A|\,|B|$)

इससे प्राप्त होता है $|A| \neq 0$. अतः A व्युत्क्रमणीय है।

विलोमतः मान लीजिए A व्युत्क्रमणीय है। तब $|A| \neq 0$

अब $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\, I \quad \text{(प्रमेय 1)}$$

या $$A\left(\frac{1}{|A|} adj\, A\right) = \left(\frac{1}{|A|} adj\, A\right) A = I$$

या $$AB = BA = I, \text{ जहाँ } B = \frac{1}{|A|} adj\, A$$

अतः A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है और $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj\, A$

उदाहरण 13 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A.\ adj\, A = |A|\,.\, I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $|A| = 1\,(16-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4) = 1 \neq 0$

अब $A_{11} = 7,\ A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 1, A_{23} = 0, A_{31} = -3, A_{32} = 0, A_{33} = 1$

इसलिए
$$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब
$$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\,.\,I$$

और
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\,A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 14 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

हल हम जानते हैं कि $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB| = -11 \neq 0$, $(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}.adj\,(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

और $|A| = -11 \neq 0$ व $|B| = 1 \neq 0$. इसलिए A^{-1} और B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और जिसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

अत: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ है।

उदाहरण 15 प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I = O$, जहाँ I 2×2 कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और O, 2×2 कोटि का एक शून्य आव्यूह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

अत: $$A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

अब $A^2 - 4A + I = O$

इसलिए $A A - 4A = -I$

या $A\ A (A^{-1}) - 4\, A A^{-1} = -I A^{-1}$ (दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन द्वारा क्योंकि $|A| \neq 0$)

या $A (A A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

या $AI - 4I = -A^{-1}$

या $$A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

अत: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्नावली 4.4

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज (adjoint) ज्ञात कीजिए

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,.A = |A|\,.\,I$ है।

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ है।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि

$A^2 + aA + bI = O$ हो।

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ है।

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ है तथा

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

17. यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\, A|$ का मान है:

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर:

(A) $\det(A)$ (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.6 सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोग (Applications of Determinants and Matrices)

इस अनुच्छेद में हम दो या तीन अज्ञात राशियों के रैखिक समीकरण निकाय के हल और रैखिक समीकरणों के निकाय की संगतता की जाँच में सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे।

संगत निकाय: निकाय संगत कहलाता है यदि इसके हलों (एक या अधिक) का अस्तित्व होता है।

असंगत निकाय: निकाय असंगत कहलाता है यदि इसके किसी भी हल का अस्तित्व नहीं होता है।

टिप्पणी इस अध्याय में हम अद्वितीय हल के समीकरण निकाय तक सीमित रहेंगे।

4.6.1 *आव्यूह के व्युत्क्रम द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय का हल (Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix)*

आइए हम रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह समीकरण के रूप में व्यक्त करते हैं और आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग करके उसे हल करते हैं।

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

मान लीजिए $\quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

तब समीकरण निकाय $AX = B$ के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त की जा सकती है।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

स्थिति 1 यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। अत: $AX = B$ से हम पाते हैं कि

$$A^{-1} (AX) = A^{-1} B \qquad (A^{-1} \text{ से पूर्व गुणन के द्वारा})$$

या $$(A^{-1}A) X = A^{-1} B \qquad (\text{साहचर्य गुणन द्वारा})$$

या $$I X = A^{-1} B$$

या $$X = A^{-1} B$$

यह आव्यूह समीकरण दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल प्रदान करता है क्योंकि एक आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है। समीकरणों के निकाय के हल करने की यह विधि आव्यूह विधि कहलाती है।

स्थिति 2 यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A| = 0$ होता है।

इस स्थिति में हम $(adj\, A)\, B$ ज्ञात करते हैं।

यदि $(adj\, A)\, B \neq O$, (O शून्य आव्यूह है), तब कोई हल नहीं होता है और समीकरण निकाय असंगत कहलाती है।

यदि $(adj\, A)\, B = O$, तब निकाय संगत या असंगत होगी क्योंकि निकाय के अनंत हल होंगे या कोई भी हल नहीं होगा।

उदाहरण 16 निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

हल समीकरण निकाय AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}$$

अब, $|A| = -11 \neq 0$, अत: A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है इसलिए इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। और इसका एक अद्वितीय हल है।

ध्यान दीजिए कि $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

इसलिए $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}$$

अर्थात् $$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-33\\ 11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$

अत: $x = 3, y = -1$

उदाहरण 17 निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

हल समीकरण निकाय को AX = B के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}8\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0 \text{ है।}$$

अत: A व्युत्क्रमणीय है, और इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है।

$A_{11} = -1,\quad A_{12} = -8,\quad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5,\quad A_{22} = -6,\quad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1,\quad A_{32} = 9,\quad A_{33} = 7$

इसलिए $$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

और $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अत: $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 1, y = 2$ व $z = 3$

उदाहरण 18 तीन संख्याओं का योग 6 है। यदि हम तीसरी संख्या को 3 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ दें तो हमें 11 प्राप्त होता है। पहली ओर तीसरी को जोड़ने से हमें दूसरी संख्या का दुगुना प्राप्त होता है। इसका बीजगणितीय निरूपण कीजिए और आव्यूह विधि से संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए पहली, दूसरी व तीसरी संख्या क्रमश: x, y और z, द्वारा निरूपित है। तब दी गई शर्तों के अनुसार हमें प्राप्त होता है:

$$x + y + z = 6$$
$$y + 3z = 11$$
$$x + z = 2y$$

या $$x - 2y + z = 0$$

इस निकाय को A X = B के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

यहाँ $|A| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ है। अब हम *adj* A ज्ञात करते हैं।

$$A_{11} = 1\,(1 + 6) = 7, \quad A_{12} = -\,(0 - 3) = 3, \quad A_{13} = -\,1$$
$$A_{21} = -\,(1 + 2) = -\,3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -\,(-\,2 - 1) = 3$$
$$A_{31} = (3 - 1) = 2, \quad A_{32} = -\,(3 - 0) = -\,3, \quad A_{33} = (1 - 0) = 1$$

अतः $adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

इस प्रकार $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj.\ (A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

क्योंकि $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+\ 0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

अतः $x = 1, y = 2, z = 3$

प्रश्नावली 4.5

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 6 तक दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 14 तक प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$

11. $2x + y + z = 1$

12. $x - y + z = 4$

$3x + 2y = 5$ $\qquad$ $x - 2y - z = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $2x + y - 3z = 0$

$3y - 5z = 9$ $\qquad$ $x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$

16. 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य Rs 60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य Rs 90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य Rs 70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

हल दिया गया गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-\ 9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अत:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

अब दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह के रूप निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

या
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 0, y = 5$ और $z = 3$

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

निम्नलिखित प्रश्नों 8 से 9 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

8. यदि x, y, z शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हों तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है:

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ हो तो:

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

सारांश

- आव्यूह $A = [a_{11}]_{1\times1}$ का सारणिक $|a_{11}|_{1\times1} = a_{11}$ के द्वारा दिया जाता है।
- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$ के द्वारा दिया जाता है।

- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ के सारणिक का मान (R_1 के अनुदिश प्रसरण से) निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों वाली त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- दिए गए आव्यूह A के सारणिक के एक अवयव a_{ij} का उपसारणिक, i वीं पंक्ति और j वां स्तंभ हटाने से प्राप्त सारणिक होता है और इसे M_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।
- a_{ij} का सहखंड $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा दिया जाता है।
- A के सारणिक का मान $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ है और इसे एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग करके प्राप्त किया जाता है।
- यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और अन्य दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों की गुणा कर दी जाए तो उनका योग शून्य होता है उदाहरणतया

  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$
- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, तो सहखंडज $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} है।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, जहाँ A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है।
- यदि कोई वर्ग आव्यूह क्रमशः अव्युत्क्रमणीय या व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि $|A| = 0$ या $|A| \neq 0$
- यदि $AB = BA = I$, जहाँ B एक वर्ग आव्यूह है तब A का व्युत्क्रम B होता है और $A^{-1} = B$ या $B^{-1} = A$ और इसलिए $(A^{-1})^{-1} = A$
- किसी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम है यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय है।
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$
- यदि

  $$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
  $$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
  $$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

  तब इन समीकरणों को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है।

  जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

- समीकरण $AX = B$ का अद्वितीय हल $X = A^{-1} B$ द्वारा दिया जाता है जहाँ $|A| \neq 0$
- समीकरणों का एक निकाय संगत या असंगत होता है यदि इसके हल का अस्तित्व है अथवा नहीं है।
- आव्यूह समीकरण $AX = B$ में एक वर्ग आव्यूह A के लिए

  (i) यदि $|A| \neq 0$, तो अद्वितीय हल का अस्तित्व है।

  (ii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B \neq O$, तो किसी हल का अस्तित्व नहीं है।

  (iii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B = O$, तो निकाय संगत या असंगत होती है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणना बोर्ड पर छड़ों का प्रयोग करके कुछ रैखिक समीकरणों की अज्ञात राशियों के गुणांकों को निरूपित करने की चीनी विधि ने वास्तव में विलोपन की साधारण विधि की खोज करने में सहायता की है। छड़ों की व्यवस्था क्रम एक सारणिक में संख्याओं की उचित व्यवस्था क्रम जैसी थी। इसलिए एक सारणिक की सरलीकरण में स्तंभों या पंक्तियों के घटाने का विचार उत्पन्न करने में चीनी प्रथम विचारकों में थे (‘Mikami, China, pp 30, 93).

सत्रहवीं शताब्दी के महान जापानी गणितज्ञ Seki Kowa द्वारा 1683 में लिखित पुस्तक 'Kai Fukudai no Ho' से ज्ञात होता है कि उन्हें सारणिकों और उनके प्रसार का ज्ञान था। परंतु उन्होंने इस विधि का प्रयोग केवल दो समीकरणों से एक राशि के विलोपन में किया परंतु युगपत रैखिक समीकरणों के हल ज्ञात करने में इसका सीधा प्रयोग नहीं किया था। ‘T. Hayashi, “The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,” in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde पहले व्यक्ति थे जिन्होनें सारणिकों को स्वतंत्र फलन की तरह से पहचाना इन्हें विधिवत इसका अन्वेषक (संस्थापक) कहा जा सकता है। Laplace (1772) ने सारणिकों को इसके पूरक उपसारणिकों के रूप में व्यक्त करके प्रसरण की व्यापक विधि दी। 1773 में Lagrange ने दूसरे व तीसरे क्रम के सारणिकों को व्यवहृत किया और सारणिकों के हल के अतिरिक्त उनका अन्यत्र भी प्रयोग किया। 1801 में Gauss ने संख्या के सिद्धांतों में सारणिकों का प्रयोग किया।

अगले महान योगदान देने वाले Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) थे जिन्होंने m-स्तंभों और n-पंक्तियों के दो आव्यूहों के गुणनफल से संबंधित प्रमेय का उल्लेख किया जो विशेष स्थिति $m = n$ में गुणनफल प्रमेय में बदल जाती है।

उसी दिन Cauchy (1812) ने भी उसी विषय-वस्तु पर शोध प्रस्तुत किए। उन्होंने आज के व्यावहारिक सारणिक शब्द का प्रयोग किया। उन्होंने Binet से अधिक संतुष्ट करने वाली गुणनफल प्रमेय की उपपत्ति दी।

इन सिद्धांतों पर महानतम योगदान वाले Carl Gustav Jacob Jacobi थे। इसके पश्चात सारणिक शब्द को अंतिम स्वीकृति प्राप्त हुई।

12081CH05

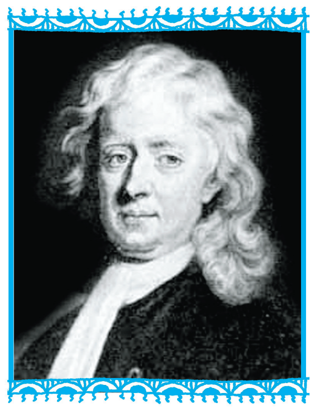
अध्याय 5

सांतत्य तथा अवकलनीयता (Continuity and Differentiability)

❖*The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 भूमिका (Introduction)

यह अध्याय अनिवार्यतः कक्षा 11 में पढ़े गए फलनों के अवकलन (differentiation) का क्रमागत है। हम कुछ निश्चित बहुपदीय फलनों एवं त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन करना सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम सांतत्य (continuity), अवकलनीयता (differentiability) तथा इनके पारस्परिक संबंधों की महत्वपूर्ण संकल्पनाओं को प्रस्तुत करेंगे। यहाँ हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय (inverse trigonometric) फलनों का अवकलन करना भी सीखेंगे। अब हम कुछ नए प्रकार के फलनों को प्रस्तुत कर रहे हैं, जिनको चरघातांकी (exponential) और लघुगणकीय (logarithmic) फलन कहते हैं। इन फलनों द्वारा हमें अवकलन की सशक्त प्रविधियों का ज्ञान होता है। अवकल गणित (differential calculus) के माध्यम से हम ज्यामितीय रूप से सुस्पष्ट (obvious) कुछ स्थितियों को समझाते हैं। इस प्रक्रिया, में हम इस विषय की कुछ आधारभूत (मूल) प्रमेयों (theorems) को सीखेंगे।

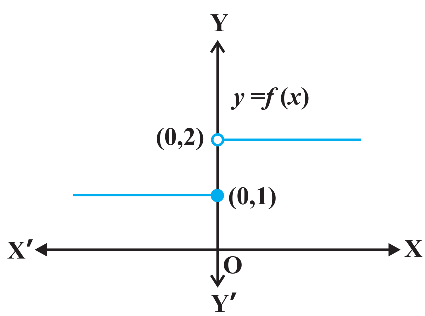


Sir Issac Newton (1642-1727)

5.2 सांतत्य (Continuity)

सांतत्य की संकल्पना का कुछ अनुमान (बोध) कराने के लिए, हम अनुच्छेद को दो अनौपचारिक उदाहरणों से प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \le 0 \\ 2, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$



आकृति 5.1

यह फलन वास्तव में वास्तविक रेखा (real line) के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.1 में दर्शाया गया है। कोई भी इस आलेख से निष्कर्ष निकाल सकता है कि $x = 0$ के अतिरिक्त, x-अक्ष

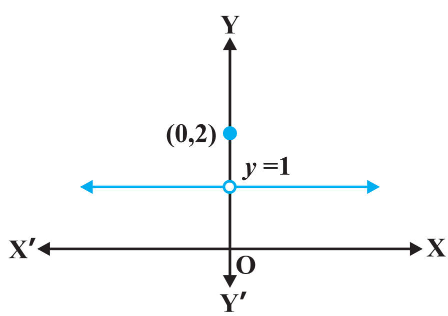
के अन्य सन्निकट बिंदुओं के लिए फलन के संगत मान भी $x = 0$ को छोड़कर एक दूसरे के समीप (लगभग समान) हैं। 0 के सन्निकट बायीं ओर के बिंदुओं, अर्थात् $-0.1, -0.01, -0.001$, प्रकार के बिंदुओं, पर फलन का मान 1 है तथा 0 के सन्निकट दायीं ओर के बिंदुओं, अर्थात् 0.1, 0.01, 0.001, प्रकार के बिंदुओं पर फलन का मान 2 है। बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाओं (limits) की भाषा का प्रयोग करके, हम कह सकते हैं कि $x = 0$ पर फलन f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ क्रमश: 1 तथा 2 हैं। विशेष रूप से बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ समान / संपाती (coincident) नहीं हैं। हम यह भी देखते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान बाएँ पक्ष की सीमा के संपाती है (बराबर है)। नोट कीजिए कि इस आलेख को हम लगातार एक साथ (in one stroke), अर्थात् कलम को इस कागज़ की सतह से बिना उठाए, नहीं खींच सकते। वास्तव में, हमें कलम को उठाने की आवश्यकता तब होती है जब हम शून्य से बायीं ओर आते हैं। यह एक उदाहरण है जहाँ फलन $x = 0$ पर संतत (continuous) नहीं है।

अब नीचे दर्शाए गए फलन पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x \neq 0 \\ 2, \text{ यदि } x = 0 \end{cases}$$

यह फलन भी प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। $x = 0$ पर दोनों ही, बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ 1 के बराबर हैं। किंतु $x = 0$ पर फलन का मान 2 है, जो बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाओं के उभयनिष्ठ मान के बराबर नहीं है।

पुन: हम नोट करते हैं कि फलन के आलेख को बिना कलम उठाए हम नहीं खींच सकते हैं। यह एक दूसरा उदाहरण है जिसमें $x = 0$ पर फलन संतत नहीं है।



आकृति 5.2

सहज रूप से (naively) हम कह सकते हैं कि एक अचर बिंदु पर कोई फलन संतत है, यदि उस बिंदु के आस-पास (around) फलन के आलेख को हम कागज़ की सतह से कलम उठाए बिना खींच सकते हैं। इस बात को हम गणितीय भाषा में, यथातथ्य (precisely), निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं:

परिभाषा 1 मान लीजिए कि f वास्तविक संख्याओं के किसी उपसमुच्चय में परिभाषित एक वास्तविक फलन है और मान लीजिए कि f के प्रांत में c एक बिंदु है। तब f बिंदु c पर संतत है, यदि

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ है।}$$

विस्तृत रूप से यदि $x = c$ पर बाएँ पक्ष की सीमा, दाएँ पक्ष की सीमा तथा फलन के मान का यदि अस्तित्व (existence) है और ये सभी एक दूसरे के बराबर हों, तो $x = c$ पर f संतत कहलाता है। स्मरण कीजिए कि यदि $x = c$ पर बाएँ पक्ष तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हैं, तो इनके उभयनिष्ठ

मान को हम $x = c$ पर फलन की सीमा कहते हैं। इस प्रकार हम सांतत्य की परिभाषा को एक अन्य प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है।

एक फलन $x = c$ पर संतत है, यदि फलन $x = c$ पर परिभाषित है और यदि $x = c$ पर फलन का मान $x = c$ पर फलन की सीमा के बराबर है। यदि $x = c$ पर फलन संतत नहीं है तो हम कहते हैं कि c पर f असंतत (discontinuous) है तथा c को f का एक *असांतत्य का बिंदु* (point of discontinuity) कहते हैं।

उदाहरण 1 $x = 1$ पर फलन $f(x) = 2x + 3$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल पहले यह ध्यान दीजिए कि फलन, $x = 1$ पर परिभाषित है और इसका मान 5 है। अब फलन की $x = 1$ पर सीमा ज्ञात करते हैं। स्पष्ट है कि

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5 \text{ है।}$$

अत: $$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

अतएव $x = 1$ पर f संतत है।

उदाहरण 2 जाँचिए कि क्या फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है?

हल ध्यान दीजिए कि प्रदत्त बिंदु $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और इसका मान 0 है। अब $x = 0$ पर फलन की सीमा निकालते हैं। स्पष्टतया

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

इस प्रकार $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

अत: $x = 0$ पर f संतत है।

उदाहरण 3 $x = 0$ पर फलन $f(x) = |x|$ के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल परिभाषा द्वारा

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

स्पष्टतया $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और $f(0) = 0$ है। बिंदु $x = 0$ पर f की बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार 0 पर f की दाएँ पक्ष की सीमा के लिए

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ है।}$$

इस प्रकार $x = 0$ पर बाएँ पक्ष की सीमा, दाएँ पक्ष की सीमा तथा फलन का मान संपाती हैं। अतः $x = 0$ पर f संतत है।

उदाहरण 4 दर्शाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है।

हल यहाँ $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और $x = 0$ पर इसका मान 1 है। जब $x \neq 0$, तब फलन बहुपदीय है। इसलिए

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

क्योंकि $x = 0$ पर f की सीमा, $f(0)$ के बराबर नहीं है, इसलिए $x = 0$ पर फलन संतत नहीं है। हम यह भी सुनिश्चित कर सकते हैं कि इस फलन के लिए असांतत्य का बिंदु केवल $x = 0$ है।

उदाहरण 5 उन बिंदुओं की जाँच कीजिए जिन पर अचर फलन (Constant function) $f(x) = k$ संतत है।

हल यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है और किसी भी वास्तविक संख्या के लिए इसका मान k है। मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या है, तो

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

चूँकि किसी वास्तविक संख्या c के लिए $f(c) = k = \lim\limits_{x\to c} f(x)$ है इसलिए फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संतत है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के लिए तत्समक फलन (Identity function) $f(x) = x$, प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संतत है।

हल स्पष्टतया यह फलन प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है और प्रत्येक वास्तविक संख्या c के लिए $f(c) = c$ है।

साथ ही
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = c = f(c)$ और इसलिए यह फलन f के प्रांत के सभी बिंदुओं पर संतत है।

एक प्रदत्त बिंदु पर किसी फलन के सांतत्य को परिभाषित करने के बाद अब हम इस परिभाषा का स्वाभाविक प्रसार (extension) करके किसी फलन के, उसके प्रांत में, सांतत्य पर विचार करेंगे।

परिभाषा 2 एक वास्तविक फलन f संतत कहलाता है यदि वह f के प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है।

इस परिभाषा को कुछ विस्तार से समझने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि f एक ऐसा फलन है, जो संवृत अंतराल (closed interval) $[a, b]$ में परिभाषित है, तो f के संतत होने के लिए आवश्यक है कि वह $[a, b]$ के अंत्य बिंदुओं (end points) a तथा b सहित उसके प्रत्येक बिंदु पर संतत हो। f का अंत्य बिंदु a पर सांतत्य का अर्थ है कि

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

और f का b पर सांतत्य का अर्थ है कि

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

प्रेक्षण कीजिए कि $\lim_{x \to a^-} f(x)$ तथा $\lim_{x \to b^+} f(x)$ का कोई अर्थ नहीं है। इस परिभाषा के परिणामस्वरूप, यदि f केवल एक बिंदु पर परिभाषित है, तो वह उस बिंदु पर संतत होता है, अर्थात् यदि f का प्रांत एकल (समुच्चय) है, तो f एक संतत फलन होता है।

उदाहरण 7 क्या $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है?

हल f को हम ऐसे लिख सकते हैं कि $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

उदाहरण 3 से हम जानते हैं कि $x = 0$ पर f संतत है।

मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $c < 0$ है। अतएव $f(c) = -c$

साथ ही $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c \qquad \text{(क्यों?)}$$

चूँकि $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, इसलिए f सभी ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अब मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $c > 0$ है। अतएव $f(c) = c$

साथ ही $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad \text{(क्यों?)}$$

क्योंकि $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, इसलिए f सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है। चूँकि f सभी बिंदुओं पर संतत है, अत: यह एक संतत फलन है।

उदाहरण 8 फलन $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल स्पष्टतया f प्रत्येक वास्तविक संख्या c के लिए परिभाषित है और c पर इसका मान $c^3 + c^2 - 1$ है। हम यह भी जानते हैं कि

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

अत: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ है इसलिए प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए f संतत है। इसका अर्थ है कि f एक संतत फलन है।

उदाहरण 9 $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल किसी एक शून्येतर (Non-zero) वास्तविक संख्या c को सुनिश्चित कीजिए

अब $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

साथ ही, चूँकि $c \neq 0$, इसलिए $f(c) = \frac{1}{c}$ है। इस प्रकार $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ और इसलिए f अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है। इस प्रकार f एक संतत फलन है।

हम इस अवसर का लाभ, *अनंत* (infinity) की संकल्पना (concept) को समझाने के लिए, उठाते हैं। हम इसके लिए फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ का विश्लेषण $x = 0$ के निकटस्थ मानों पर करते हैं। इसके लिए हम 0 के *सन्निकट* की वास्तविक संख्याओं के लिए फलन के मानों का अध्ययन करने की प्रचलित युक्ति का प्रयोग करते हैं। अनिवार्यत: (essentially) हम $x = 0$ पर f के दाएँ पक्ष की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। इसको हम नीचे सारणीबद्ध करते हैं। (सारणी 5.1)

सारणी 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x दायीं ओर से 0 के निकट अग्रसर होता है $f(x)$ का मान उत्तरोत्तर अति शीघ्रता से बढ़ता जाता है। इस बात को एक अन्य प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है, जैसे:

एक धन वास्तविक संख्या को 0 के अत्यंत निकट चुनकर, $f(x)$ के मान को किसी भी प्रदत्त संख्या से अधिक किया जा सकता है। प्रतीकों में इस बात को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं कि

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(इसको इस प्रकार पढ़ा जाता है: 0 पर, $f(x)$ के दाएँ पक्ष की धनात्मक सीमा अनंत है)। यहाँ पर हम बल देना चाहते हैं कि $+\infty$ एक वास्तविक संख्या नहीं है और इसलिए 0 पर f के दाएँ पक्ष की सीमा का अस्तित्व नहीं है (वास्तविक संख्याओं के रूप में)।

इसी प्रकार से 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा ज्ञात की जा सकती है। निम्नलिखित सारणी से स्वतः स्पष्ट है।

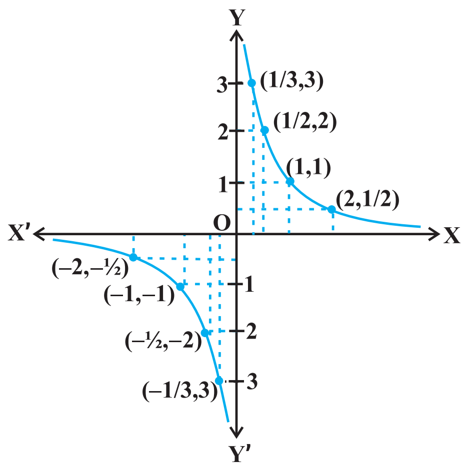
सारणी 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

सारणी 5.2 से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को 0 के अत्यंत निकट चुनकर, $f(x)$ के मान को किसी भी प्रदत्त संख्या से कम किया जा सकता है। प्रतीकात्मक रूप से हम

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{लिखते हैं}$$

(जिसे इस प्रकार पढ़ा जाता है: 0 पर $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा ऋणात्मक अनंत है।) यहाँ हम इस बात पर बल देना चाहते हैं कि $-\infty$ एक वास्तविक संख्या नहीं है अतएव 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा का अस्तित्व नहीं है (वास्तविक संख्याओं के रूप में)। आकृति 5.3 का आलेख उपर्युक्त तथ्यों का ज्यामितीय निरूपण है।



आकृति 5.3

उदाहरण 10 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ यदि } x \le 1 \\ x-2, \text{ यदि } x > 1 \end{cases}$$

हल फलन f वास्तविक रेखा के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है।

दशा 1 यदि $c < 1$, तो $f(c) = c + 2$ है। इस प्रकार $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x + 2 = c + 2$ है।

अतः 1 से कम सभी वास्तविक संख्याओं पर f संतत है।

दशा 2 यदि $c > 1$, तो $f(c) = c - 2$ है।

इसलिए $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x - 2) = c - 2 = f(c)$ है।

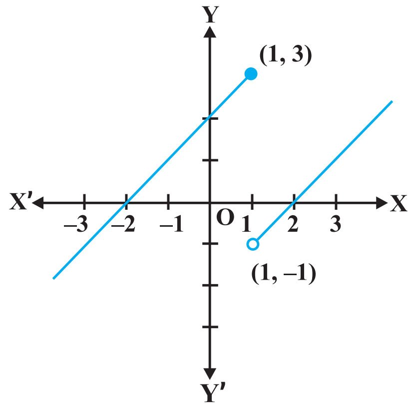
अतएव उन सभी बिंदुओं पर जहाँ $x > 1$ है, f संतत है।

दशा 3 यदि $c = 1$, तो $x = 1$ पर f के बाएँ पक्ष की सीमा, अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$$

$x = 1$ पर f के दाएँ पक्ष की सीमा, अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-2) = 1-2 = -1$$



आकृति 5.4

अब चूँकि $x = 1$ पर f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती (coincident) नहीं हैं, अतः $x = 1$ पर f संतत नहीं है। इस प्रकार f के असांतत्य का बिंदु केवल मात्र $x = 1$ है। इस फलन का आलेख आकृति 5.4 में दर्शाया गया है।

उदाहरण 11 निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन f के समस्त (सभी) असांतत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ यदि } x < 1 \\ 0, \text{ यदि } \quad x = 1 \\ x-2, \text{ यदि } x > 1 \end{cases}$$

हल पूर्ववर्ती उदाहरण की तरह यहाँ भी हम देखते हैं प्रत्येक वास्तविक संख्या $x \neq 1$ के लिए f संतत है। $x = 1$ के लिए f के बाएँ पक्ष की सीमा, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$ है।

$x = 1$ के लिए f के दाएँ पक्ष की सीमा, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-2) = 1-2 = -1$ है।

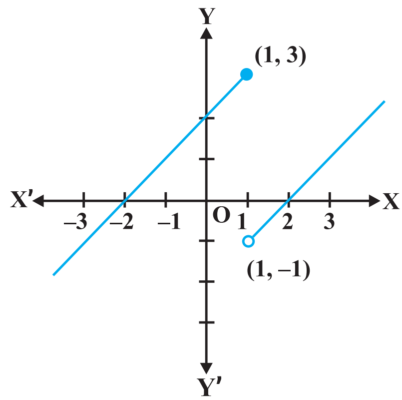
चूँकि $x = 1$ पर f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती नहीं हैं, अतः $x = 1$ पर f संतत नहीं है। इस प्रकार f के असांतत्य का बिंदु केवल मात्र $x = 1$ है। इस फलन का आलेख आकृति 5.5 में दर्शाया गया है।

उदाहरण 12 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{यदि } \quad x < 0 \\ -x+2, \text{ यदि } x > 0 \end{cases}$$

हल ध्यान दीजिए कि विचाराधीन फलन 0 (शून्य) के अतिरिक्त अन्य समस्त वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। परिभाषानुसार इस फलन का प्रांत

$D_1 \cup D_2$ है जहाँ $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ और
$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ है।

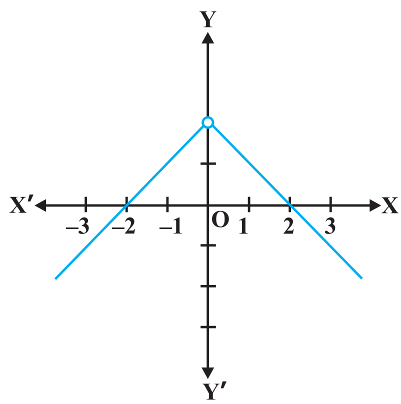


आकृति 5.5

दशा 1 यदि $c \in D_1$, तो $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x + 2) = c + 2 = f(c)$ है अतएव D_1 में f संतत है।

दशा 2 यदि $c \in D_2$, तो $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (-x + 2) = -c + 2 = f(c)$ है अतएव D_2 में भी f संतत है।

क्योंकि f अपने प्रांत के समस्त बिंदुओं पर संतत है जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि f एक संतत फलन है। इस फलन का आलेख आकृति 5.6 में खींचा गया है। ध्यान दीजिए कि इस फलन के आलेख को खींचने के लिए हमें कलम को कागज़ की सतह से उठाना पड़ता है, किंतु हमें ऐसा केवल उन बिंदुओं पर करना पड़ता है जहाँ पर फलन परिभाषित नहीं है।



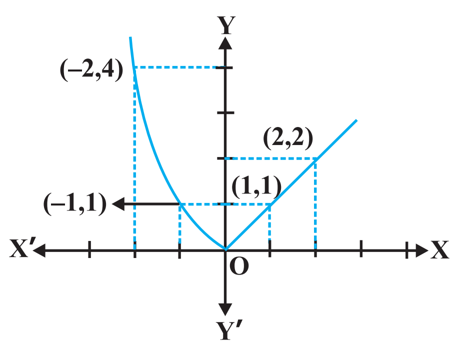
आकृति 5.6

उदाहरण 13 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ x^2, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

हल स्पष्टतया, प्रदत्त फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.7 में दिया है। इस आलेख के निरीक्षण से यह तर्कसंगत लगता है कि फलन के प्रांत को वास्तविक रेखा के तीन असंयुक्त (disjoint) उप समुच्चयों में विभाजित कर लिया जाए। मान लिया कि

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ तथा
$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ है।



आकृति 5.7

दशा 1 D_1 के किसी भी बिंदु पर $f(x) = x^2$ है और यह सरलता से देखा जा सकता है कि D_1 में f संतत है। (उदाहरण 2 देखिए)

दशा 2 D_3 के किसी भी बिंदु पर $f(x) = x$ है और यह सरलता से देखा जा सकता है कि D_3 में f संतत है। (उदाहरण 6 देखिए)

दशा 3 अब हम $x = 0$ पर फलन का विश्लेषण करते हैं। 0 के लिए फलन का मान $f(0) = 0$ है। 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \text{ है तथा}$$

0 पर f के दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ है।}$$

अत: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ अतएव 0 पर f संतत है। इसका अर्थ यह हुआ कि f अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है। अत: f एक संतत फलन है।

उदाहरण 14 दर्शाइए कि प्रत्येक बहुपद फलन संतत होता है।

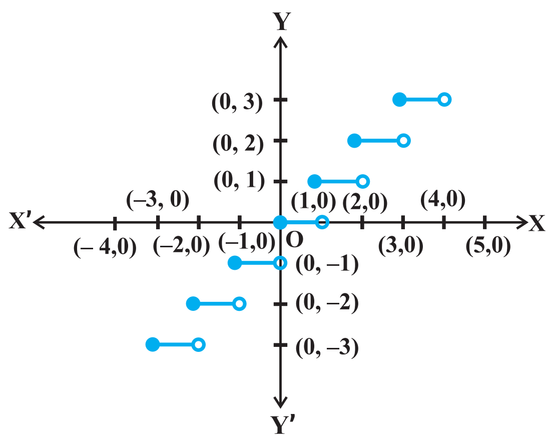
हल स्मरण कीजिए कि कोई फलन p, एक बहुपद फलन होता है यदि वह किसी प्राकृत संख्या n के लिए $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ द्वारा परिभाषित हो, जहाँ $a_i \in \mathbf{R}$ तथा $a_n \neq 0$ है। स्पष्टतया यह फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। किसी निश्चित वास्तविक संख्या c के लिए हम देखते हैं कि

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

इसलिए परिभाषा द्वारा c पर p संतत है। चूँकि c कोई भी वास्तविक संख्या है इसलिए p किसी भी वास्तविक संख्या के लिए संतत है, अर्थात् p एक संतत फलन है।

उदाहरण 15 $f(x) = [x]$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन के असांतत्य के समस्त बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक को प्रकट करता है, जो x से कम या उसके बराबर है।

हल पहले तो हम यह देखते हैं कि f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.8 में दिखाया गया है।



आकृति 5.8

आलेख से ऐसा प्रतीत होता है कि प्रदत्त फलन x के सभी पूर्णांक मानों के लिए असंतत है। नीचे हम छानबीन करेंगे कि क्या यह सत्य है।

दशा 1 मान लीजिए कि c एक ऐसी वास्तविक संख्या है, जो किसी भी पूर्णांक के बराबर नहीं है। आलेख से यह स्पष्ट है कि c के निकट की सभी वास्तविक संख्याओं के लिए दिए हुए फलन का मान $[c]$; हैं, अर्थात् $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} [x] = [c]$ साथ ही $f(c) = [c]$ अतः प्रदत्त फलन, उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है, जो पूर्णांक नहीं है।

दशा 2 मान लीजिए कि c एक पूर्णांक है। अतएव हम एक ऐसी पर्याप्ततः छोटी वास्तविक संख्या $r > 0$ प्राप्त कर सकते हैं जो कि $[c - r] = c - 1$ जबकि $[c + r] = c$ है।

सीमाओं के रूप में, इसका अर्थ यह हुआ कि

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = c - 1 \text{ तथा } \lim_{x\to c^+} f(x) = c$$

चूँकि किसी भी पूर्णांक c के लिए ये सीमाएँ समान नहीं हो सकती हैं, अतः प्रदत्त फलन x सभी पूर्णांक मानों के लिए असंतत है।

5.2.1 *संतत फलनों का बीजगणित (Algebra of continuous functions)*

पिछली कक्षा में, सीमा की संकल्पना समझने के उपरांत, हमनें सीमाओं के बीजगणित का कुछ अध्ययन किया था। अनुरूपतः अब हम संतत फलनों के बीजगणित का भी कुछ अध्ययन करेंगे। चूँकि किसी बिंदु पर एक फलन का सांतत्य पूर्णरूप से उस बिंदु पर फलन की सीमा द्वारा निर्धारित होता है, अतएव यह तर्कसंगत है कि हम सीमाओं के सदृश्य ही यहाँ भी बीजीय परिणामों की अपेक्षा करें।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f तथा g दो ऐसे वास्तविक फलन हैं, जो एक वास्तविक संख्या c के लिए संतत हैं। तब,

(1) $f + g$, $x = c$ पर संतत है

(2) $f - g$, $x = c$ पर संतत है

(3) $f \cdot g$, $x = c$ पर संतत है

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $x = c$ पर संतत है (जबकि $g(c) \neq 0$ है।)

उपपत्ति हम बिंदु $x = c$ पर $(f + g)$ के सांतत्य की जाँच करते हैं। हम दखते हैं कि

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \qquad (f + g \text{ की परिभाषा द्वारा})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad (\text{सीमाओं के प्रमेय द्वारा})$$

$$= f(c) + g(c) \qquad \text{(क्योंकि } f \text{ तथा } g \text{ संतत फलन हैं)}$$

$$= (f + g)(c) \qquad (f + g \text{ की परिभाषा द्वारा})$$

अत:, $f + g$ भी $x = c$ के लिए संतत है।

प्रमेय 1 के शेष भागों की उपपत्ति इसी के समान है जिन्हें पाठकों के लिए अभ्यास हेतु छोड़ दिया गया है।

टिप्पणी

(i) उपर्युक्त प्रमेय के भाग (3) की एक विशेष दशा के लिए, यदि f एक अचर फलन $f(x) = \lambda$ हो, जहाँ λ, कोई अचर वास्तविक संख्या है, तो $(\lambda \,.\, g)(x) = \lambda \,.\, g(x)$ द्वारा परिभाषित फलन $(\lambda \,.\, g)$ भी एक संतत फलन है। विशेष रूप से, यदि $\lambda = -1$, तो f के सांतत्य में $-f$ का सांतत्य अंतर्निहित होता है।

(ii) उपर्युक्त प्रमेय के भाग (4) की एक विशेष दशा के लिए, यदि f एक अचर फलन $f(x) = \lambda$, तो $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ द्वारा परिभाषित फलन $\frac{\lambda}{g}$ भी एक संतत फलन होता है, जहाँ $g(x) \neq 0$ है। विशेष रूप से, g के सांतत्य में $\frac{1}{g}$ का सांतत्य अंतर्निहित है।

उपर्युक्त दोनों प्रमेयों के उपयोग द्वारा अनेक संतत फलनों को बनाया जा सकता है। इनसे यह निश्चित करने में भी सहायता मिलती है कि कोई फलन संतत है या नहीं। निम्नलिखित उदाहरणों में यह बात स्पष्ट की गई है।

उदाहरण 16 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमेय फलन संतत होता है।

हल स्मरण कीजिए कि प्रत्येक परिमेय फलन f निम्नलिखित रूप का होता है:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

जहाँ p और q बहुपद फलन हैं। f का प्रांत, उन बिंदुओं को छोड़कर जिन पर q शून्य है, समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। चूँकि बहुपद फलन संतत होते हैं (उदाहरण 14), अतएव प्रमेय 1 के भाग (4) द्वारा f एक संतत फलन है।

उदाहरण 17 sine फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल इस पर विचार करने के लिए हम निम्नलिखित तथ्यों का प्रयोग करते हैं:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

हमने इन तथ्यों को यहाँ प्रमाणित तो नहीं किया है, किन्तु sine फलन के आलेख को शून्य के निकट देख कर ये तथ्य सहजानुभूति (intuitively) से स्पष्ट हो जाता है।

अब देखिए कि $f(x) = \sin x$ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या है। $x = c + h$ रखने पर, यदि $x \to c$ तो हम देखते हैं कि $h \to 0$ इसलिए

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \sin x \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(c+h) \\ &= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h] \\ &= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h\to 0} [\cos c \sin h] \\ &= \sin c + 0 = \sin c = f(c)\end{aligned}$$

इस प्रकार $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ अतः f एक संतत फलन है।

टिप्पणी इसी प्रकार cosine फलन के सांतत्य को भी प्रमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 18 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan x$ एक संतत फलन है।

हल दिया हुआ फलन $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ है। यह फलन उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है, जहाँ $\cos x \neq 0$, अर्थात् $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ है। हमने अभी प्रमाणित किया है कि sine और cosine फलन, संतत फलन हैं। इसलिए tan फलन, इन दोनों फलनों का भागफल होने के कारण, x के उन सभी मानों के लिए संतत है जिन के लिए यह परिभाषित है।

फलनों के संयोजन (composition) से संबंधित, संतत फलनों का व्यवहार एक रोचक तथ्य है। स्मरण कीजिए कि यदि f और g दो वास्तविक फलन हैं, तो

$$(f \circ g)\,(x) = f(g\,(x))$$

परिभाषित है, जब कभी g का परिसर f के प्रांत का एक उपसमुच्चय होता है। निम्नलिखित प्रमेय (प्रमाण बिना केवल व्यक्त), संयुक्त (composite) फलनों के सांतत्य को परिभाषित करती है।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि f और g इस प्रकार के दो वास्तविक मानीय (real valued) फलन हैं कि c पर $(f \circ g)$ परिभाषित है। यदि c पर g तथा $g\,(c)$ पर f संतत है, तो c पर $(f \circ g)$ संतत होता है।

निम्नलिखित उदाहरणों में इस प्रमेय को स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 19 दर्शाइए कि $f(x) = \sin(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है।

हल प्रेक्षण कीजिए कि विचाराधीन फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। फलन f को, g तथा h दो फलनों के संयोजन $(g \circ h)$ के रूप में सोचा जा सकता है, जहाँ $g(x) = \sin x$ तथा $h(x) = x^2$ है। चूँकि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, इसलिए प्रमेय 2 द्वारा यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है, कि f एक संतत फलन है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि $f(x) = |1 - x + |x||$ द्वारा परिभाषित फलन f, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, एक संतत फलन है।

हल सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए g को $g(x) = 1 - x + |x|$ तथा h को $h(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित कीजिए। तब,

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h(1 - x + |x|) \\ &= |1 - x + |x|| = f(x)\end{aligned}$$

उदाहरण 7 में हम देख चुके हैं कि h एक संतत फलन है। इसी प्रकार एक बहुपद फलन और एक मापांक फलन का योग होने के कारण g एक संतत फलन है। अत: दो संतत फलनों का संयुक्त फलन होने के कारण f भी एक संतत फलन है।

प्रश्नावली 5.1

1. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ तथा $x = 5$ पर संतत है।

2. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

3. निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए:

   (a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}$, $x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n$, $x = n$, पर संतत है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

5. क्या $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f

   $x = 0$, $x = 1$, तथा $x = 2$ पर संतत है?

f के सभी असांतत्य के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जब कि f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{यदि } x\le 2\\ 2x-3, & \text{यदि } x>2\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}|x|+3, & \text{यदि } x\le -3\\ -2x, & \text{यदि } -3<x<3\\ 6x+2, & \text{यदि } x\ge 3\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि } x\ne 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & \text{यदि } x<0\\ -1, & \text{यदि } x\ge 0\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{यदि } x\ge 1\\ x^2+1, & \text{यदि } x<1\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}x^3-3, & \text{यदि } x\le 2\\ x^2+1, & \text{यदि } x>2\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}x^{10}-1, & \text{यदि } x\le 1\\ x^2, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

13. क्या $f(x)=\begin{cases}x+5, & \text{यदि } x\le 1\\ x-5, & \text{यदि } x>1\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है?

फलन f, के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

14. $f(x)=\begin{cases}3, & \text{यदि } 0\le x\le 1\\ 4, & \text{यदि } 1<x<3\\ 5, & \text{यदि } 3\le x\le 10\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{यदि } x<0\\ 0, & \text{यदि } 0\le x\le 1\\ 4x, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{यदि } x\le -1\\ 2x, & \text{यदि } -1<x\le 1\\ 2, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

17. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{यदि } x\le 3\\ bx+3, & \text{यदि } x>3\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर संतत है।

18. λ के किस मान के लिए

$$f(x)=\begin{cases}\lambda(x^2-2x), & \text{यदि } x\le 0\\ 4x+1, & \text{यदि } x>0\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x=0$ पर संतत है। $x=1$ पर इसके सांतत्य पर विचार कीजिए।

19. दर्शाइए कि $g(x)=x-[x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर असंतत है। यहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है।

20. क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

21. निम्नलिखित फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए:

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \,.\, \cos x$

22. cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए।

23. f के सभी असांतत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x<0\\ x+1, & \text{यदि } x\ge 0\end{cases}$$

24. निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x\ne 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

25. f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & \text{यदि } x\ne 0\\ -1, & \text{यदि } x=0\end{cases}$$

प्रश्न 26 से 29 में k के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर संतत हो:

26. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{यदि } x\ne \dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{यदि } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ द्वारा परिभाषित फलन $x=\dfrac{\pi}{2}$ पर

27. $f(x)=\begin{cases} kx^2, & \text{यदि } x\le 2 \\ 3, & \text{यदि } x>2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=2$ पर

28. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x\le \pi \\ \cos x, & \text{यदि } x>\pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=\pi$ पर

29. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x\le 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x>5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=5$ पर

30. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x)=\begin{cases} 5, & \text{यदि } x\le 2 \\ ax+b, & \text{यदि } 2<x<10 \\ 21, & \text{यदि } x\ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

31. दर्शाइए कि $f(x) = \cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

32. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

33. जाँचिए कि क्या $\sin |x|$ एक संतत फलन है।

34. $f(x) = |x| - |x + 1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असांत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

5.3. अवकलनीयता (Differentiability)

पिछली कक्षा में सीखे गए तथ्यों को स्मरण कीजिए। हमनें एक वास्तविक फलन के अवकलज (Derivative) को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया था।

मान लीजिए कि f एक वास्तविक फलन है तथा c इसके प्रांत में स्थित एक बिंदु है। c पर f का अवकलज निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

यदि इस सीमा का अस्तित्व हो तो c पर f के अवकलज को $f'(c)$ या $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ द्वारा प्रकट करते हैं।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

द्वारा परिभाषित फलन, जब भी इस सीमा का अस्तित्व हो, f के अवकलज को परिभाषित करता है। f के अवकलज को $f'(x)$ या $\frac{d}{dx}(f(x))$ द्वारा प्रकट करते हैं और यदि $y = f(x)$ तो इसे $\frac{dy}{dx}$ या y' द्वारा प्रकट करते हैं। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन (differentiation) कहते हैं। हम वाक्यांश "x के सापेक्ष $f(x)$ का अवकलन कीजिए (differentiate)" का भी प्रयोग करते हैं, जिसका अर्थ होता है कि $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

अवकलज के बीजगणित के रूप में निम्नलिखित नियमों को प्रमाणित किया जा चुका है:

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (लेबनीज़ या गुणनफल नियम)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, जहाँ $v \neq 0$ (भागफल नियम)

नीचे दी गई सारणी में कुछ प्रामाणिक (standard) फलनों के अवकलजों की सूची दी गई है:

सारणी 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

जब कभी भी हमने अवकलज को परिभाषित किया है तो एक सुझाव भी दिया है कि "*यदि सीमा का अस्तित्व हो।*" अब स्वाभाविक रूप से प्रश्न उठता है कि यदि ऐसा नहीं है तो क्या होगा? यह प्रश्न नितांत प्रासंगिक है और इसका उत्तर भी। यदि $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, तो हम कहते हैं कि c पर f अवकलनीय नहीं है। दूसरे शब्दों में, हम कहते हैं कि अपने प्रांत के किसी बिंदु c पर फलन f अवकलनीय है, यदि दोनों सीमाएँ $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ तथा $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ परिमित (finite) तथा समान हैं। फलन अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय कहलाता है, यदि वह अंतराल $[a, b]$ के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है। जैसा कि सांतत्य के संदर्भ में कहा गया था कि अंत्य बिंदुओं a तथा b पर हम क्रमशः दाएँ तथा बाएँ पक्ष की सीमाएँ लेते हैं, जो कि और कुछ नहीं, बल्कि a तथा b पर फलन के दाएँ पक्ष तथा बाएँ पक्ष के अवकलज ही हैं। इसी प्रकार फलन अंतराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है, यदि वह अंतराल (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है।

प्रमेय 3 यदि फलन किसी बिंदु c पर अवकलनीय है, तो उस बिंदु पर वह संतत भी है।

उपपत्ति चूँकि बिंदु c पर f अवकलनीय है, अतः

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

किंतु $x \neq c$ के लिए

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)$$

इसलिए $$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c) \right]$$

या $$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] . \lim_{x \to c} [(x - c)]$$

$$= f'(c) . 0 = 0$$

या $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

इस प्रकार $x = c$ पर फलन f संतत है।

उपप्रमेय 1 प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है।

यहाँ हम ध्यान दिलाते हैं कि उपर्युक्त कथन का विलोम (converse) सत्य नहीं है। निश्चय ही हम देख चुके हैं कि $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है। इस फलन के बाएँ पक्ष की सीमा पर विचार करने से

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

तथा दाँए पक्ष की सीमा

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ है।}$$

चूँकि 0 पर उपर्युक्त बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ समान नहीं हैं, इसलिए $\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ का अस्तित्व नहीं है और इस प्रकार 0 पर f अवकलनीय नहीं है। अतः f एक अवकलनीय फलन नहीं है।

5.3.1 संयुक्त फलनों के अवकलज (*Differentials of composite functions*)

संयुक्त फलनों के अवकलज के अध्ययन को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। मान लीजिए कि हम f का अवकलज ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

एक विधि यह है कि द्विपद प्रमेय के प्रयोग द्वारा $(2x + 1)^3$ को प्रसारित करके प्राप्त बहुपद फलन का अवकलज ज्ञात करें, जैसा नीचे स्पष्ट किया गया है;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]\\ &= \frac{d}{dx}(8x^3+12x^2+6x+1)\\ &= 24x^2 + 24x + 6\\ &= 6\,(2x + 1)^2\end{aligned}$$

अब, ध्यान दीजिए कि

$$f(x) = (h \text{ o } g)\,(x)$$

जहाँ $g(x) = 2x + 1$ तथा $h(x) = x^3$ है। मान लीजिए $t = g(x) = 2x + 1$. तो $f(x) = h(t) = t^3$.

अत: $\dfrac{df}{dx} = 6\,(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \dfrac{dh}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

इस दूसरी विधि का लाभ यह है कि कुछ प्रकार के फलन, जैसे $(2x + 1)^{100}$ के अवकलज का परिकलन करना इस विधि द्वारा सरल हो जाता है। उपर्युक्त परिचर्चा से हमें औपचारिक रूप से निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है, जिसे श्रृंखला नियम (chain rule) कहते हैं।

प्रमेय 4 (श्रृंखला नियम) मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, जो u तथा v दो फलनों का संयोजन है; अर्थात् $f = v \text{ o } u$. मान लीजिए कि $t = u(x)$ और, यदि $\dfrac{dt}{dx}$ तथा $\dfrac{dv}{dt}$ दोनों का अस्तित्व है, तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

हम इस प्रमेय की उपपत्ति छोड़ देते हैं। श्रृंखला नियम का विस्तार निम्नलिखित प्रकार से किया जा सकता है। मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, जो तीन फलनों u, v और w का संयोजन है, अर्थात्

$f = (w \text{ o } u) \text{ o } v$ है यदि $t = u(x)$ तथा $s = v(t)$ है तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}(w \text{o} u)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

यदि उपर्युक्त कथन के सभी अवकलजों का अस्तित्व हो तो पाठक और अधिक फलनों के संयोजन के लिए शृंखला नियम को प्रयुक्त कर सकते हैं।

उदाहरण 21 $f(x) = \sin(x^2)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि प्रदत्त फलन दो फलनों का संयोजन है। वास्तव में, यदि $u(x) = x^2$ और $v(t) = \sin t$ है तो

$$f(x) = (v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ रखने पर ध्यान दीजिए कि $\frac{dv}{dt} = \cos t$ तथा $\frac{dt}{dx} = 2x$ और दोनों का अस्तित्व भी हैं। अत: शृंखला नियम द्वारा

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \,.\, 2x$$

सामान्यत: अंतिम परिणाम को x के पदों में व्यक्त करने का प्रचलन है अतएव

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 8 में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए:

1. $\sin(x^2 + 5)$ **2.** $\cos(\sin x)$ **3.** $\sin(ax + b)$

4. $\sec(\tan(\sqrt{x}))$ **5.** $\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 \,.\, \sin^2(x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbf{R}$, $x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

10. सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

5.3.2 अस्पष्ट फलनों के अवकलज (Derivatives of Implicit Functions)

अब तक हम $y = f(x)$ के रूप के विविध फलनों का अवकलन करते रहे हैं परंतु यह आवश्यक नहीं है कि फलनों को सदैव इसी रूप में व्यक्त किया जाए। उदाहरणार्थ, x और y के बीच निम्नलिखित संबंधों में से एक पर विशेष रूप से विचार कीजिए:

$$x - y - \pi = 0$$
$$x + \sin xy - y = 0$$

पहली दशा में, हम y के लिए सरल कर सकते हैं और संबंध को $y = x - \pi$ के रूप में लिख सकते हैं। दूसरी दशा में, ऐसा नहीं लगता है कि संबंध y को सरल करने का कोई आसान तरीका है। फिर भी दोनों में से किसी भी दशा में, y की x पर निर्भरता के बारे में कोई संदेह नहीं है। जब x और y के बीच का संबंध इस प्रकार व्यक्त किया गया हो कि उसे y के लिए सरल करना आसान हो और $y = f(x)$ के रूप में लिखा जा सके, तो हम कहते हैं कि y को x के स्पष्ट (explicit) फलन के रूप में व्यक्त किया गया है। उपर्युक्त दूसरे संबंध में, हम कहते हैं कि y को x के अस्पष्ट (implicity) फलन के रूप में व्यक्त किया गया है।

उदाहरण 22 यदि $x - y = \pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल एक विधि यह है कि हम y के लिए सरल करके उपर्युक्त संबंध को निम्न प्रकार लिखें यथा

$$y = x - \pi$$

तब
$$\frac{dy}{dx} = 1$$

विकल्पतः इस संबंध का x, के सापेक्ष सीधे अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

याद कीजिए कि $\frac{d\pi}{dx}$ का अर्थ है कि x के सापेक्ष एक अचर π का अवकलन करना। इस प्रकार

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

जिसका तात्पर्य है कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

उदाहरण 23 यदि $y + \sin y = \cos x$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम इस संबंध का सीधे अवकलज करते हैं।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

शृंखला नियम का प्रयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

इससे निम्नलिखित परिणाम मिलता है,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1+\cos y}$$

जहाँ $y \neq (2n + 1)\,\pi$

5.3.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज (*Derivatives of Inverse Trigonometric Functions*)

हम पुनः ध्यान दिलाते हैं कि प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन संतत होते हैं, परंतु हम इसे प्रमाणित नहीं करेंगे। अब हम इन फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए शृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

$f(x) = \sin^{-1} x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह मान लीजिए कि इसका अस्तित्व है।

हल मान लीजिए कि $y = f(x) = \sin^{-1} x$ है तो $x = \sin y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ध्यान दीजिए कि यह केवल $\cos y \neq 0$ के लिए परिभाषित है, अर्थात् , $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, अर्थात् $x \neq -1, 1$, अर्थात् $x \in (-1, 1)$

इस परिणाम को कुछ आकर्षक बनाने हेतु हम निम्नलिखित व्यवहार कौशल (manipulation) करते हैं। स्मरण कीजिए कि $x \in (-1, 1)$ के लिए $\sin(\sin^{-1} x) = x$ और इस प्रकार

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

साथ ही चूँकि $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ एक धनात्मक राशि है और इसलिए $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

इस प्रकार $x \in (-1, 1)$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$	$\sin^{-1}x$	$\cos^{-1}x$	$\tan^{-1}x$
$f'(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
Domain of f'	(–1, 1)	(–1, 1)	**R**

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित प्रश्नों में $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

1. $2x + 3y = \sin x$ **2.** $2x + 3y = \sin y$ **3.** $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$ **5.** $x^2 + xy + y^2 = 100$ **6.** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = k$ **8.** $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ **9.** $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \; -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

13. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

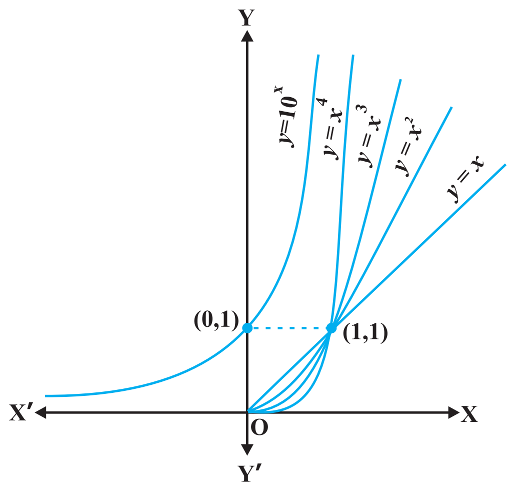
14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलन (Exponential and Logarithmic Functions)

अभी तक हमने फलनों, जैसे बहुपद फलन, परिमेय फलन तथा त्रिकोणमितीय फलन, के विभिन्न वर्गों के कुछ पहलुओं के बारे में सीखा है। इस अनुच्छेद में हम परस्पर संबंधित फलनों के एक नए वर्ग के बारे में सीखेंगे, जिन्हें चरघातांकी (exponential) तथा लघुगणकीय (logarithmic) फलन कहते हैं। यहाँ पर विशेष रूप से यह बतलाना आवश्यक है कि इस अनुच्छेद के बहुत से कथन प्रेरक तथा यथातथ्य हैं और उनकी उपपत्तियाँ इस पुस्तक की विषय-वस्तु के क्षेत्र से बाहर हैं।

आकृति 5.9 में $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ तथा $y = f_4(x) = x^4$ के आलेख दिए गए हैं। ध्यान दीजिए कि ज्यों-ज्यों x की घात बढ़ती जाती है वक्र की प्रवणता भी बढ़ती जाती है। वक्र की प्रवणता बढ़ने से वृद्धि की दर तेज होती जाती है। इसका अर्थ यह है कि $x\,(>1)$ के मान में निश्चित वृद्धि के संगत $y = f_n(x)$ का मान बढ़ता जाता है जैसे-जैसे n का मान 1, 2, 3, 4 होता जाता है। यह कल्पनीय है कि ऐसा कथन सभी धनात्मक मान के लिए सत्य है जहाँ $f_n(x) = x^n$ है। आवश्यकरूप से, इसका अर्थ यह हुआ कि जैसे-जैसे n में वृद्धि होती जाती है $y = f_n(x)$ का आलेख y-अक्ष की ओर अधिक झुकता जाता है। उदाहरण के लिए $f_{10}(x) = x^{10}$ तथा $f_{15}(x) = x^{15}$ पर विचार कीजिए। यदि x का मान 1 से बढ़कर 2 हो जाता है, तो f_{10} का मान 1 से बढ़कर 2^{10} हो जाता है, जबकि f_{15} का मान 1 से बढ़कर 2^{15} हो जाता है। इस प्रकार x में समान वृद्धि के लिए, f_{15} की वृद्धि f_{10} की वृद्धि के अपेक्षा अधिक तीव्रता से होती है।



आकृति 5.9

उपर्युक्त परिचर्चा का निष्कर्ष यह है कि बहुपद फलनों की वृद्धि उनके घात पर निर्भर करती है, अर्थात् घात बढ़ाते जाइए वृद्धि बढ़ती जाएगी। इसके उपरांत एक स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि, क्या कोई ऐसा फलन है जो बहुपद फलनों की अपेक्षा अधिक तेजी से बढ़ता है? इसका उत्तर सकारात्मक है और इस प्रकार के फलन का एक उदाहरण $y = f(x) = 10^x$ है

हमारा दावा यह है कि किसी धन पूर्णांक n के लिए यह फलन f, फलन $f_n(x) = x^n$ की अपेक्षा अधिक तेजी से बढ़ता है। उदाहरण के लिए हम सिद्ध कर सकते हैं कि $f_{100}(x) = x^{100}$ की अपेक्षा 10^x अधिक तेजी से बढ़ता है। यह नोट कीजिए कि x के बड़े मानों के लिए, जैसे $x = 10^3$, $f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ जबकि $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ है। स्पष्टतः $f_{100}(x)$ की अपेक्षा $f(x)$

का मान बहुत अधिक है। यह सिद्ध करना कठिन नहीं है कि x के उन सभी मानों के लिए जहाँ $x > 10^3$, $f(x) > f_{100}(x)$ है। किंतु हम यहाँ पर इसकी उपपत्ति देने का प्रयास नहीं करेंगे। इसी प्रकार x के बड़े मानों को चुनकर यह सत्यापित किया जा सकता है कि, किसी भी धन पूर्णांक n के लिए $f_n(x)$ की अपेक्षा $f(x)$ का मान अधिक तेजी से बढ़ता है।

परिभाषा 3 फलन $y = f(x) = b^x$, धनात्मक आधार $b > 1$ के लिए चरघातांकी फलन कहलाता है।

आकृति 5.9 में $y = 10^x$ का रेखाचित्र दर्शाया गया है।

यह सलाह दी जाती है कि पाठक इस रेखाचित्र को b के विशिष्ट मानों, जैसे 2, 3 और 4 के लिए खींच कर देखें। चरघातांकी फलन की कुछ प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

(1) चरघातांकी फलन का प्रांत, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** होता है।

(2) चरघातांकी फलन का परिसर, समस्त धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।

(3) बिंदु (0, 1) चरघातांकी फलन के आलेख पर सदैव होता है (यह इस तथ्य का पुनः कथन है कि किसी भी वास्तविक संख्या $b > 1$ के लिए $b^0 = 1$)

(4) चरघातांकी फलन सदैव एक वर्धमान फलन (increasing function) होता है, अर्थात् जैसे-जैसे हम बाएँ से दाएँ ओर बढ़ते जाते हैं, आलेख ऊपर उठता जाता है।

(5) x के अत्यधिक बड़े ऋणात्मक मानों के लिए चरघातांकी फलन का मान 0 के अत्यंत निकट होता है। दूसरे शब्दों में, द्वितीय चतुर्थांश में, आलेख उत्तरोत्तर x-अक्ष की ओर अग्रसर होता है (किंतु उससे कभी मिलता नहीं है।)

आधार 10 वाले चरघातांकी फलन को **साधारण चरघातांकी फलन (common exponential Function)** कहते हैं। कक्षा XI की पाठ्यपुस्तक के परिशिष्ट A.1.4 में हमने देखा था कि श्रेणी

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \text{ है।}$$

का योग एक ऐसी संख्या है जिसका मान 2 तथा 3 के मध्य होता है और जिसे e द्वारा प्रकट करते हैं। इस e को आधार के रूप में प्रयोग करने पर, हमें एक अत्यंत महत्वपूर्ण चरघातांकी फलन $y = e^x$ प्राप्त होता है। इसे **प्राकृतिक चरघातांकी फलन (natural exponential function)** कहते हैं।

यह जानना रुचिकर होगा कि क्या चरघातांकी फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है और यदि 'हाँ' तो क्या उसकी एक समुचित व्याख्या की जा सकती है। यह खोज निम्नलिखित परिभाषा के लिए प्रेरित करती है।

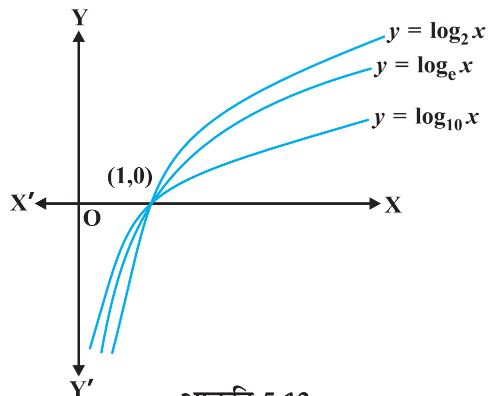
परिभाषा 4 मान लीजिए कि $b > 1$ एक वास्तविक संख्या है। तब हम कहते हैं कि, b आधार पर a का लघुगणक x है, यदि $b^x = a$ है।

b आधार पर a के लघुगणक को प्रतीक $\log_b a$ से प्रकट करते हैं। इस प्रकार यदि $b^x = a$, तो $\log_b a = x$ इसका अनुभव करने के लिए आइए हम कुछ स्पष्ट उदाहरणों का प्रयोग करें। हमें ज्ञात है कि $2^3 = 8$ है। लघुगणकीय शब्दों में हम इसी बात को पुन: $\log_2 8 = 3$ लिख सकते हैं। इसी प्रकार $10^4 = 10000$ तथा $\log_{10} 10000 = 4$ समतुल्य कथन हैं। इसी तरह से $625 = 5^4 = 25^2$ तथा $\log_5 625 = 4$ अथवा $\log_{25} 625 = 2$ समतुल्य कथन हैं।

थोड़ा सा और अधिक परिपक्व दृष्टिकोण से विचार करने पर हम कह सकते हैं कि $b > 1$ को आधार निर्धारित करने के कारण 'लघुगणक' को धन वास्तविक संख्याओं के समुच्चय से सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में एक फलन के रूप में देखा जा सकता है। यह फलन, जिसे **लघुगणकीय फलन (logarithmic function)** कहते हैं, निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$\log_b : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$

$x \rightarrow \log_b x = y$ यदि $b^y = x$



आकृति 5.10

पूर्व कथित तरह से, यदि आधार $b = 10$ है तो इसे **'साधारण लघुगणक'** और यदि $b = e$ है तो इसे **'प्राकृतिक लघुगणक'** कहते हैं। बहुधा प्राकृतिक लघुगणक को ln द्वारा प्रकट करते हैं। इस अध्याय में $\log x$ आधार e वाले लघुगणकीय फलन को निरूपित करता है। आकृति 5.10 में 2, तथा 10 आधारीय लघुगणकीय फलनों के आलेख दर्शाए गए हैं।

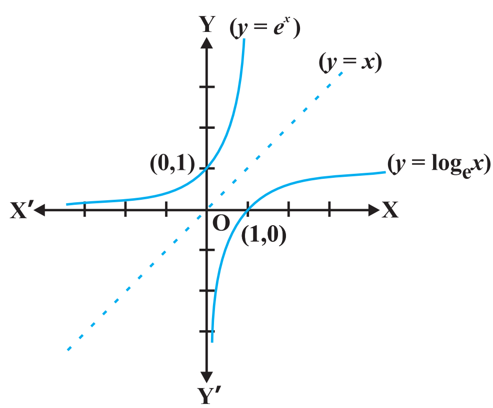
आधार $b > 1$ वाले लघुगणकीय फलनों की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएँ नीचे सूचीबद्ध हैं:

(1) धनेतर (non-positive) संख्याओं के लिए हम लघुगणक की कोई अर्थपूर्ण परिभाषा नहीं बना सकते हैं और इसलिए लघुगणकीय फलन का प्रांत $\mathbf{R}^+$ है।

(2) लघुगणकीय फलन का परिसर समस्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(3) बिंदु $(1, 0)$ लघुगणकीय फलनों के आलेख पर सदैव रहता है।

(4) लघुगणकीय फलन एक वर्धमान फलन होते हैं, अर्थात् ज्यों-ज्यों हम बाएँ से दाएँ ओर चलते हैं, आलेख उत्तरोत्तर ऊपर उठता जाता है।



आकृति 5.11

(5) 0 के अत्याधिक निकट वाले x के लिए, $\log x$ के मान को किसी भी दी गई वास्तविक संख्या से कम किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, चौथे (चतुर्थ) चतुर्थांश में आलेख y-अक्ष के निकटतम अग्रसर होता है (किंतु इससे कभी मिलता नहीं है)।

(6) आकृति 5.11 में $y = e^x$ तथा $y = \log_e x$ के आलेख दर्शाए गए हैं। यह ध्यान देना रोचक है कि दोनों वक्र रेखा $y = x$ में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं।

लघुगणकीय फलनों के दो महत्वपूर्ण गुण नीचे प्रमाणित किए गए हैं:

(1) आधार परिवर्तन का एक मानक नियम है, जिससे $\log_a p$ को $\log_b p$ के पदों में ज्ञात किया जा सकता है। मान लीजिए कि $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ तथा $\log_b a = \gamma$ है। इसका अर्थ यह है कि $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ तथा $b^\gamma = a$ है। अब तीसरे परिणाम को पहले में रखने से

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

इसको दूसरे समीकरण में प्रयोग करने पर

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

अतः $\beta = \alpha\gamma$ अथवा $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ है। इस प्रकार

$$\mathbf{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) गुणनफलनों पर log फलन का प्रभाव इसका एक अन्य रोचक गुण है। मान लीजिए कि $\log_b pq = \alpha$ है। इससे $b^\alpha = pq$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार यदि $\log_b p = \beta$ तथा $\log_b q = \gamma$ है तो $b^\beta = p$ तथा $b^\gamma = q$ प्राप्त होता है। परंतु $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ है।

इसका तात्पर्य है कि $\alpha = \beta + \gamma$, अर्थात्

$$\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$$

इससे एक विशेष रोचक तथा महत्वपूर्ण परिणाम तब निकलता है जब $p = q$ है। ऐसी दशा में, उपर्युक्त को पुनः निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\mathbf{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log_b p}$$

इसका एक सरल व्यापकीकरण अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है अर्थात् किसी भी धन पूर्णांक n के लिए

$$\mathbf{\log_b p^n = n \log_b p}$$

वास्तव में यह परिणाम n के किसी भी वास्तविक मान के लिए सत्य है, किंतु इसे हम प्रमाणित करने का प्रयास नहीं करेंगे। इसी विधि से पाठक निम्नलिखित को सत्यापित कर सकते हैं:

$$\mathbf{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y}$$

उदाहरण 24 क्या यह सत्य है कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए $x = e^{\log x}$ है?

हल पहले तो ध्यान दीजिए कि log फलन का प्रांत सभी धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है। इसलिए उपर्युक्त समीकरण धनेतर वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य नहीं है। अब मान लीजिए कि $y = e^{\log x}$ है। यदि $y > 0$ तब दोनो पक्षों का लघुगणक लेने से $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$ है। जिससे $y = x$ प्राप्त होता है। अतएव $x = e^{\log x}$ केवल x के धन मानों के लिए सत्य है।

अवकल गणित (differential calculus) में, प्राकृतिक चरघातांकी फलन का एक असाधारण गुण यह है कि, अवकलन की प्रक्रिया में यह परिवर्तित नहीं होता है। इस गुण को नीचे प्रमेयों में व्यक्त किया गया है, जिसकी उपपत्ति को हम छोड़ देते हैं।

प्रमेय 5*

(1) x के सापेक्ष e^x का अवकलज e^x ही होता है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) x के सापेक्ष $\log x$ का अवकलज $\frac{1}{x}$ होता है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

उदाहरण 25 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) e^{-x} (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

हल

(i) मान लीजिए $y = e^{-x}$ है। अब श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \sin (\log x)$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(iii) मान लीजिए कि $y = \cos^{-1} (e^x)$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

(iv) मान लीजिए कि $y = e^{\cos x}$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

*कृपया पूरक पाठ्य सामग्री पृष्ठ 232-233 पर देखें

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$ **2.** $e^{\sin^{-1} x}$ **3.** e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$ **5.** $\log(\cos e^x)$ **6.** $e^x + e^{x^2} + ... + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, $x > 0$ **8.** $\log(\log x), x > 1$ **9.** $\dfrac{\cos x}{\log x}$, $x > 0$

10. $\cos(\log x + e^x)$

5.5. लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

इस अनुच्छेद में हम निम्नलिखित प्रकार के एक विशिष्ट वर्ग के फलनों का अवकलन करना सीखेंगे:

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

लघुगणक (e आधार पर) लेने पर उपर्युक्त को निम्नलिखित प्रकार से पुन: लिख सकते हैं

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log [u(x)]$$

इसका तात्पर्य है कि

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$$

इस विधि में ध्यान देने की मुख्य बात यह है कि $f(x)$ तथा $u(x)$ को सदैव धनात्मक होना चाहिए अन्यथा उनके लघुगणक परिभाषित नहीं होंगे। इस प्रक्रिया को **लघुगणकीय अवकलन (logarithmic differentiation)** कहते हैं और जिसे निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 26 x के सापेक्ष $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ का अवकलन कीजिए।

हल मान लीजिए कि $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

दोनों पक्षों के लघुगणक लेने पर

$$\log y = \frac{1}{2}[\log (x-3) + \log (x^2+4) - \log (3x^2+4x+5)]$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवलकन करने पर

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

उदाहरण 27 x के सापेक्ष a^x का अवकलन कीजिए, जहाँ a एक धन अचर है।

हल मान लीजिए कि $y = a^x$, तो

$$\log y = x \log a$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = y \log a$$

इस प्रकार $$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

विकल्पत: $$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log a}) = e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$= e^{x \log a} . \log a = a^x \log a$$

उदाहरण 28 x के सापेक्ष $x^{\sin x}$, का अवकलन कीजिए, जब कि $x > 0$ है।

हल मान लीजिए कि $y = x^{\sin x}$ है। अब दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \sin x \log x$$

अतएव $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

या $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

या $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \log x$$

उदाहरण 29 यदि $y^x + x^y + x^x = a^b$ है। तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ तथा $w = x^x$ रखने पर हमें $u + v + w = a^b$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{... (1)}$$

अब $u = y^x$ है। दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log u = x \log y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \quad \text{... (2)}$$

इसी प्रकार $v = x^y$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log v = y \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$ प्राप्त होता है।

अतएव $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right] \quad \ldots (3)$$

पुनः $w = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणन करने पर

$$\log w = x \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x \, . \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $$\frac{dw}{dx} = w\,(1 + \log x)$$

$$= x^x\,(1 + \log x) \quad \ldots (4)$$

(1), (2), (3) तथा (4), द्वारा

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) + x^y\left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) + x^x\,(1 + \log x) = 0$$

या $$(x \, . \, y^{x-1} + x^y \, . \, \log x)\,\frac{dy}{dx} = -\,x^x\,(1 + \log x) - y \, . \, x^{y-1} - y^x \log y$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x \log y + y \, . \, x^{y-1} + x^x(1 + \log x)]}{x \, . \, y^{x-1} + x^y \log x}$$

प्रश्नावली 5.5

1 से 11 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\cos x \, . \, \cos 2x \, . \, \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)\,(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

5. $(x + 3)^2 \cdot (x + 4)^3 \cdot (x + 5)^4$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 से 15 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x-y)}$

16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ का अवकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से कीजिए:

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके

(iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

18. यदि u, v तथा w, x के फलन हैं, तो दो विधियों अर्थात् प्रथम-गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा, द्वितीय - लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u.\ v.\ w) = \frac{du}{dx}\ v.\ w + u\ .\ \frac{dv}{dx}\ .\ w + u\ .\ v\ \frac{dw}{dx}$$

5.6 फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

कभी-कभी दो चर राशियों के बीच का संबंध न तो स्पष्ट होता है और न अस्पष्ट, किंतु एक अन्य (तीसरी) चर राशि से पृथक्-पृथक् संबंधों द्वारा प्रथम दो राशियों के मध्य एक संबंध स्थापित हो जाता है ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि उन दोनों के बीच का संबंध एक तीसरी चर राशि के माध्यम से वर्णित है। यह तीसरी चर राशि **प्राचल (Parameter)** कहलाती है। अधिक सुस्पष्ट तरीके से दो चर राशियों x तथा y के बीच, $x = f(t)$, $y = g(t)$ के रूप में व्यक्त संबंध, को प्राचलिक रूप में व्यक्त संबंध कहते हैं, जहाँ t एक प्राचल है।

इस रूप के फलनों के अवकलज ज्ञात करने हेतु, शृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \left(\text{जब कभी } \frac{dx}{dt} \neq 0\right) \text{प्राप्त होता है।}$$

इस प्रकार $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \left(\text{क्योंकि } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ तथा } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) [\text{बशर्ते } f'(t) \neq 0]$$

उदाहरण 30 यदि $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$$

इसलिए $$\frac{dx}{d\theta} = - a \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

उदाहरण 31 यदि $x = at^2, y = 2at$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $x = at^2, y = 2at$

इसलिए $$\frac{dx}{dt} = 2at \quad \text{तथा} \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

उदाहरण 32 यदि $x = a (\theta + \sin \theta), y = a (1 - \cos \theta)$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल यहाँ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta), \frac{dy}{d\theta} = a (\sin \theta)$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

टिप्पणी यहाँ, यह ध्यान दीजिए कि $\frac{dy}{dx}$ को मुख्य चर राशियों x और y को सम्मिलित किए बिना ही, केवल प्राचल के पदों में व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 33 यदि $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ है तब

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + (\sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

अत: $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ का प्राचलिक समीकरण है।

इस प्रकार, $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ और $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

इसलिए, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

प्रश्नावली 5.6

यदि प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में x तथा y दिए समीकरणों द्वारा, एक दूसरे से प्राचलिक रूप में संबंधित हों, तो प्राचलों का विलोपन किए बिना, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

1. $x = 2at^2$, $y = at^4$

2. $x = a\cos\theta$, $y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$

4. $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a\,(\theta - \sin\theta),\ y = a\,(1 + \cos\theta)$ **7.** $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\dfrac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$ **9.** $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

10. $x = a\,(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ \ y = a\,(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

5.7 द्वितीय कोटि का अवकलज (Second Order Derivative)

मान लीजिए कि $y = f(x)$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \ldots (1)$$

यदि $f'(x)$ अवकलनीय है तो हम x के सापेक्ष (1) का पुनः अवकलन कर सकते हैं। इस प्रकार बायाँ पक्ष $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ हो जाता है, जिसे द्वितीय कोटि का अवकलज (Second Order Derviative) कहते हैं और $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ से निरूपित करते हैं। $f(x)$ के द्वितीय कोटि के अवकलज को $f''(x)$ से भी निरूपित करते हैं। यदि $y = f(x)$ हो तो इसे $D^2(y)$ या y'' या y_2 से भी निरूपित करते हैं। हम टिप्पणी करते हैं कि उच्च क्रम के अवकलन भी इसी प्रकार किए जाते हैं।

उदाहरण 34 यदि $y = x^3 + \tan x$ है तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $y = x^3 + \tan x$ है। अब

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

इसलिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 + \sec^2 x)$$

$$= 6x + 2\sec x\,.\,\sec x\tan x = 6x + 2\sec^2 x\tan x$$

उदाहरण 35 यदि $y = A\sin x + B\cos x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ है।

हल यहाँ पर

$$\frac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$$

और
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$$
$$= - \text{A} \sin x - \text{B} \cos x = - y$$

इस प्रकार
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

उदाहरण 36 यदि $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

हल यहाँ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ है। अब

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

इसलिए
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

अतः
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$- 30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

उदाहरण 37 यदि $y = \sin^{-1} x$ है तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ है।

हल यहाँ $y = \sin^{-1} x$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

या
$$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

या
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)} \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

या
$$\sqrt{(1-x^2)} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

या $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=0$$

अतः $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$$

विकल्पतः दिया है कि $y=\sin^{-1}x$ है तो

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{, अर्थात् } (1-x^2)\,y_1^2=1$$

अतएव $$(1-x^2)\cdot 2y_1y_2+y_1^2(0-2x)=0$$

अतः $$(1-x^2)\ y_2-xy_1=0$$

प्रश्नावली 5.7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में दिए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए:

1. x^2+3x+2 **2.** x^{20} **3.** $x\ .\cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3\log x$ **6.** $e^x\sin 5x$

7. $e^{6x}\cos 3x$ **8.** $\tan^{-1}x$ **9.** $\log(\log x)$

10. $\sin(\log x)$ **11.** यदि $y=5\cos x-3\sin x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

12. यदि $y=\cos^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

13. यदि $y=3\cos(\log x)+4\sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2y_2+xy_1+y=0$

14. यदि $y=Ae^{mx}+Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2}-(m+n)\frac{dy}{dx}+mny=0$

15. यदि $y=500e^{7x}+600e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2}=49y$ है।

16. यदि $e^y(x+1)=1$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ है।

17. यदि $y=(\tan^{-1}x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2y_2+2x(x^2+1)\,y_1=2$ है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 38 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) $\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $\log_7 (\log x)$

हल

(i) मान लीजिए कि $y=\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}=(3x+2)^{\frac{1}{2}}+(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ है।

ध्यान दीजिए कि यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं $x>-\dfrac{2}{3}$ के लिए परिभाषित है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(3x+2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$=\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3)-\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

यह सभी वास्तविक संख्याओं $x>-\dfrac{2}{3}$ के लिए परिभाषित है।

(ii) मान लीजिए कि $y=\log_7(\log x)=\dfrac{\log(\log x)}{\log 7}$ (आधार परिवर्तन के सूत्र द्वारा)

समस्त वास्तविक संख्याओं $x>1$ के लिए फलन परिभाषित है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log(\log x))$$

$$=\frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\frac{1}{x\log 7\log x}$$

उदाहरण 39 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) $\cos^{-1}(\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

हल

(i) मान लीजिए कि $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ है। ध्यान दीजिए कि यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं।

$$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \text{ since } \frac{\pi}{2}-x \in [0.\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2}-x$$

अत: $f'(x) = -1$ है।

(ii) मान लीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ है। ध्यान दीजिए कि यह फलन उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है जिनके लिए $\cos x \neq -1$, अर्थात् π के समस्त विषम गुणजों के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं के लिए हम इस फलन को निम्नलिखित प्रकार से पुन: व्यक्त कर सकते हैं:

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

ध्यान दीजिए कि हम अंश तथा हर में $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ को काट सके, क्योंकि यह शून्य के बराबर नहीं है। अत: $f'(x) = \frac{1}{2}$ है।

(iii) मान लीजिए कि $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ है। इस फलन का प्रांत ज्ञात करने के लिए हमें उन सभी x को ज्ञात करने की आवश्यकता है जिनके लिए $-1 \leq \frac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$ है। क्योंकि $\frac{2^{x+1}}{1+4^x}$ सदैव

धन राशि है, इसलिए हमें उन सभी x को ज्ञात करना है जिनके लिए $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$, अर्थात् वे सभी x जिनके लिए $2^{x+1} \leq 1 + 4^x$ है। हम इसको $2 \leq \frac{1}{2^x} + 2^x$ प्रकार भी लिख सकते हैं, जो सभी x के लिए सत्य है। अत: फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। अब $2^x = \tan\theta$ रखने पर यह फलन निम्नलिखित प्रकार से पुन: लिखा जा सकता है:

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

अत:
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x} \cdot (2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

उदाहरण 40 यदि सभी $0 < x < \pi$ के लिए $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ है तो $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ फलन $y = (\sin x)^{\sin x}$ सभी धन वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log (\sin x)^{\sin x} = \sin x \log (\sin x)$$

अब
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log (\sin x))$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log (\sin x)) \cos x$$

अब $\frac{dy}{dx} = y((1 + \log(\sin x)) \cos x) = (1 + \log(\sin x))(\sin x)^{\sin x} \cos x$

उदाहरण 41 धनात्मक अचर a के लिए $\frac{dy}{dx}$, ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$y = a^{t+\frac{1}{t}}, \text{ तथा } x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a \text{ है।}$$

हल ध्यान दीजिए कि दोनों y तथा x, समस्त वास्तविक संख्या $t \neq 0$ के लिए परिभाषित हैं। स्पष्टतः

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}} \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right) . \log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

इसी प्रकार

$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{dx}{dt} \neq 0$ केवल यदि $t \neq \pm 1$ है। अतः $t \neq \pm 1$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}} \log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

उदाहरण 42 $e^{\cos x}$ के सापेक्ष $\sin^2 x$ का अवकलन कीजिए।

हल मान लीजिए कि $u(x) = \sin^2 x$ तथा $v(x) = e^{\cos x}$ है। यहाँ हमें $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ ज्ञात करना है। स्पष्टतः

$$\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x \text{ और } \frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x} \text{ है।}$$

अतः
$$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x \cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न संख्या 1 से 11 तक प्रदत्त फलनों का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

3. $(5x)^{3 \cos x\, 2x}$

4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1.$

5. $\dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}},\ -2 < x < 2.$

6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7. $(\log x)^{\log x},\ x > 1$

8. $\cos(a \cos x + b \sin x)$, किन्हीं अचर a तथा b के लिए

9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)},\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए

11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$, $x > 3$ के लिए

12. यदि $y = 12(1 - \cos t),\ x = 10(t - \sin t),\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

13. यदि $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 < x < 1$ है तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

14. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

15. यदि किसी $c > 0$ के लिए $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$ a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

16. यदि $\cos y = x \cos(a + y)$, तथा $\cos a \ne \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

17. यदि $x = a\,(\cos t + t \sin t)$ और $y = a\,(\sin t - t\cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

18. यदि $f(x) = |x|^3$, तो प्रमाणित कीजिए कि $f''(x)$ का अस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

19. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा cosines के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।

20. क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर संतत हो किंतु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

21. यदि $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \le x \le 1$, तो दर्शाइए कि

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

सारांश

- एक वास्तविक मानीय फलन अपने प्रांत के किसी बिंदु पर संतत होता है यदि उस बिंदु पर फलन की सीमा, उस बिंदु पर फलन के मान के बराबर होती है।
- संतत फलनों के योग, अंतर, गुणनफल और भागफल संतत होते हैं, अर्थात्, यदि f तथा g संतत फलन हैं, तो

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ संतत होता है।

  $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ संतत होता है।

  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (जहाँ $g(x) \neq 0$) संतत होता है।
- प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है किंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।
- शृंखला-नियम फलनों के संयोजन का अवकलन करने के लिए एक नियम है। यदि $f = v \circ u$, $t = u(x)$ और यदि $\frac{dt}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dt}$ का अस्तित्व है तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- कुछ मानक अवकलज (परिभाषित प्रांतों में) निम्नलिखित हैं:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- लघुगणकीय अवकलन, $f(x) = [u\,(x)]^{v\,(x)}$ के रूप के फलनों के अवकलन करने के लिए एक सशक्त तकनीक है। इस तकनीक के अर्थपूर्ण होने के लिए आवश्यक है कि $f(x)$ तथा $u(x)$ दोनों ही धनात्मक हों।

12081CH06

अध्याय 6

अवकलज के अनुप्रयोग (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

6.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 5 में हमने संयुक्त फलनों, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, अस्पष्ट फलनों, चरघातांकीय फलनों और लघुघातांकीय फलनों का अवकलज ज्ञात करना सीखा है। प्रस्तुत अध्याय में, हम गणित की विभिन्न शाखाओं में अवकलज के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे यथा इंजिनियरिंग, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान और कई दूसरे क्षेत्र। उदाहरण के लिए हम सीखेंगे कि किस प्रकार अवकलज का उपयोग (i) राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में, (ii) किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की समीकरण ज्ञात करने में, (iii) एक फलन के आलेख पर वर्तन बिंदु ज्ञात करने में, जो हमें उन बिंदुओं को ज्ञात करने में सहायक होता है जिन पर फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान होता है। हम उन अंतरालों को ज्ञात करने में भी अवकलज का उपयोग करेंगे, जिनमें एक फलन वर्धमान या ह्रासमान होता है। अंततः हम कुछ राशियों के सन्निकट मान प्राप्त करने में अवकलज प्रयुक्त करेंगे।

6.2 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of Change of Quantities)

पुनः स्मरण कीजिए कि अवकलज $\frac{ds}{dt}$ से हमारा तात्पर्य समय अंतराल t के सापेक्ष दूरी s के परिवर्तन की दर से है। इसी प्रकार, यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$), x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है और $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y की परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त, यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$ है तब शृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ यदि } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ प्राप्त होता है।}$$

इस प्रकार, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है ।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 5$ cm है।

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए, r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ से प्राप्त है। जब $r = 5$ cm तो $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ है। अत: वृत्त का क्षेत्रफल 10π cm²/cm की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 2 एक घन का आयतन 9 cm³/s की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबायीं 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

हल मान लीजिए कि घन की एक कोर की लंबायीं x cm है। घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S है। तब, $V = x^3$ और $S = 6x^2$, जहाँ x समय t का फलन है।

अब $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \text{ (दिया है)}$$

इसलिए $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \ldots (1)$$

अब $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) के प्रयोग से)}$$

अत:, जब $$x = 10 \text{ cm}, \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

उदाहरण 3 एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए समय t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर है

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

यह दिया गया है कि $\frac{dr}{dt} = 4$ cm

इसलिए जब $r = 10$ cm

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$$

अतः जब $r = 10$ cm तब वृत्त से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 80π cm^2/s की दर से बढ़ रहा है।

> **टिप्पणी** x का मान बढ़ने से यदि y का मान बढ़ता है तो $\frac{dy}{dx}$ धनात्मक होता है और x का मान बढ़ने से यदि y का मान घटता है, तो $\frac{dy}{dx}$ ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 4 किसी आयत की लंबायीं x, 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 10$ cm और $y = 6$ cm है तब आयत के (a) परिमाप और (b) क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि समय के सापेक्ष लंबायीं x घट रही है और चौड़ाई y बढ़ रही है तो हम पाते हैं कि

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ cm/min} \quad \text{और} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

(a) आयत का परिमाप P से प्रदत्त है, अर्थात्

$$P = 2(x + y)$$

इसलिए $$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3 + 2) = -2 \text{ cm/min}$$

(b) आयत का क्षेत्रफल A से प्रदत्त है यथा

$$A = x \cdot y$$

इसलिए $$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= -3(6) + 10(2) \text{ (क्योंकि } x = 10 \text{ cm और } y = 6 \text{ cm)}$$

$$= 2 \text{ cm}^2/\text{min}$$

उदाहरण 5 किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत C(x) रुपये में

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमांत लागत (marginal cost या MC) से हमारा अभिप्राय किसी स्तर पर उत्पादन के संपूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत लागत उत्पादन के किसी स्तर पर x इकाई के सापेक्ष संपूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है। हम पाते हैं कि

सीमांत लागत $$\text{MC} = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

जब $x = 3$ है तब $$\text{MC} = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$

$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

अत: अभीष्ट सीमांत लागत अर्थात लागत प्रति इकाई Rs 30.02 (लगभग) है।

उदाहरण 6 किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में R(x) = $3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए। जहाँ सीमांत आय (marginal revenue or MR) से हमारा अभिप्राय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष संपूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत आय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर होती है। हम जानते हैं कि

सीमांत आय $$\text{MR} = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

जब $x = 5$ है तब $$\text{MR} = 6(5) + 36 = 66$$

अत: अभीष्ट सीमांत आय अर्थात आय प्रति इकाई Rs 66 है।

प्रश्नावली 6.1

1. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(a) $r = 3$ cm है। (b) $r = 4$ cm है।

2. एक घन का आयतन 8 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि इसके किनारे की लंबायीं 12 cm है।

3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 cm है।

4. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/s की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लंबा है?

5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है ओर तरंगें वृत्तों में 5 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 cm है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ cm है?

7. एक आयत की लंबायीं x, 5 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ cm और $y = 6$ cm हैं तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 cm^3 गैस प्रति सेकंड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 cm है।

9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 cm है।

10. एक 5 m लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 cm/s की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 m दूर है?

11. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा हैं। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

12. हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ cm/s की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है?

13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

14. एक पाइप से रेत 12 cm^3/s की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने के शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 cm है?

15. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंध कुल लागत C(x) (रुपये में)

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

16. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय R(x) रुपयों में

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

प्रश्न 17 तथा 18 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

17. एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है:

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में

$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 वर्धमान (Increasing) और ह्रासमान (Decreasing) फलन

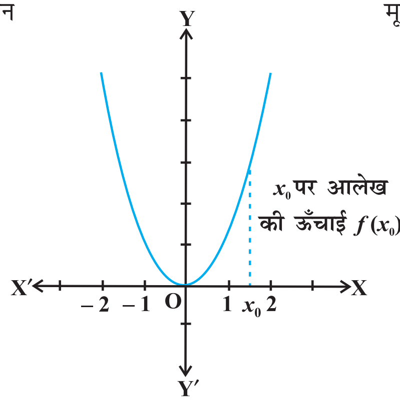
इस अनुच्छेद में हम अवकलन का प्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि फलन वर्धमान है या ह्रासमान या इनमें से कोई नहीं है।

$f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। इस फलन का आलेख आकृति 6.1 में दिया गया है।

मूल बिंदु के बायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते हैं तो आलेख की ऊँचाई घटती जाती है।



आकृति 6.1

मूल बिंदु के दायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते है तो आलेख की ऊँचाई बढ़ती जाती है।

सर्वप्रथम मूल बिंदु के दायीं ओर के आलेख (आकृति 6.1) पर विचार करते हैं। यह देखिए कि आलेख के अनुदिश जैसे जैसे बाएँ से दाएँ ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार बढ़ती जाती है। इसी कारण वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए फलन वर्धमान कहलाता है।

अब मूल बिंदु के बायीं ओर के आलेख पर विचार करते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि जैसे जैसे आलेख के अनुदिश बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार घटती जाती है। फलस्वरूप वास्तविक संख्याओं $x < 0$ के लिए फलन ह्रासमान कहलाता है।

हम अब एक अंतराल में वर्धमान या ह्रासमान फलनों की निम्नलिखित विश्लेषणात्मक परिभाषा देंगे।

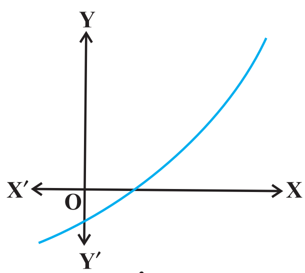
परिभाषा 1 मान लीजिए वास्तविक मान फलन f के प्रांत में I एक अंतराल है। तब f

(i) अंतराल I में वर्धमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

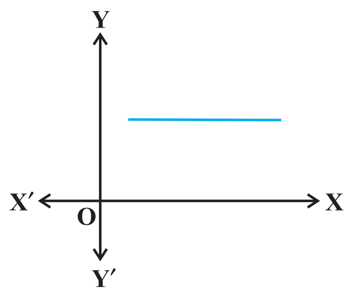
(ii) अंतराल I में ह्रासमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(iii) अंतराल I में अचर है, यदि $f(x) = c, x \in$ I जहाँ c एक अचर है।

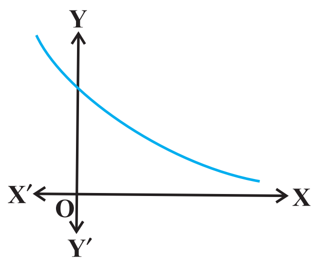
इस प्रकार के फलनों का आलेखीय निरूपण आकृति 6.2 में देखिए।



वर्धमान फलन
(i)



अचर फलन
(ii)



निरंतर ह्रासमान फलन
(iii)

आकृति 6.2

अब हम एक बिंदु पर वर्धमान या ह्रासमान फलन को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 मान लीजिए कि वास्तविक मानों के परिभाषित फलन f के प्रांत में एक बिंदु x_0 है तब x_0 पर f वर्धमान और ह्रासमान कहलाता है यदि x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक ऐसे विवृत्त अंतराल I का अस्तित्व इस प्रकार है कि I में, f क्रमशः वर्धमान और ह्रासमान है

आइए इस परिभाषा को वर्धमान फलन के लिए स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 7 दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x) = 7x - 3$, **R** पर एक वर्धमान फलन है।

हल मान लीजिए **R** में x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं, तब

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2$$
$$\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

इस प्रकार, परिभाषा 1 से परिणाम निकलता है कि **R** पर f एक वर्धमान फलन है।

अब हम वर्धमान और ह्रासमान फलनों के लिए प्रथम अवकलज परीक्षण प्रस्तुत करेंगे। इस परीक्षण की उपपत्ति में अध्याय 5 में अध्ययन की गई मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f अंतराल $[a,b]$ पर संतत और विवृत्त अंतराल (a,b) पर अवकलनीय है। तब

(a) $[a,b]$ में f वर्धमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है।

(b) $[a,b]$ में f ह्रासमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) < 0$ है।

(c) $[a,b]$ में f एक अचर फलन है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) = 0$ है।

उपपत्ति (a) मान लीजिए $x_1, x_2 \in [a, b]$ इस प्रकार हैं कि $x_1 < x_2$ तब मध्य मान प्रमेय से x_1 और x_2 के मध्य एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

अर्थात् $$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\text{क्योंकि } f'(c) > 0)$$

अर्थात् $$f(x_2) > f(x_1)$$

इस प्रकार, हम देखते हैं, कि

$$[a,b] \text{ के सभी } x_1, x_2 \text{ के लिए } x_1 < x_2 \quad f(x_1) \quad f(x_2)$$

अतः $[a,b]$ में f एक वर्धमान फलन है।

भाग (b) और (c) की उपपत्ति इसी प्रकार है। पाठकों के लिए इसे अभ्यास हेतु छोड़ा जाता है।

टिप्पणी

इस सदंर्भ में एक अन्य सामान्य प्रमेय के अनुसार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के अतिरिक्त $f'(x) > 0$ जहाँ x, अंतराल में कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को वर्धमान कहते हैं। इसी प्रकार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के सिवाय $f^1(x) < 0$ जहाँ x अंतराल का कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को ह्रासमान कहते हैं।

उदाहरण 8 दिखाइए कि प्रदत्त फलन f,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{R}$ पर वर्धमान फलन है।

हल ध्यान दीजिए कि

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \quad \text{सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए} \end{aligned}$$

इसलिए फलन f, $\mathbf{R}$ पर वर्धमान है।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त फलन $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ में ह्रासमान है

(b) $(\pi, 2\pi)$, में वर्धमान है

(c) $(0, 2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

हल ध्यान दीजिए कि $f'(x) = -\sin x$

(a) चूँकि प्रत्येक $x \in (0, \pi)$ के लिए $\sin x > 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) < 0$ और इसलिए $(0, \pi)$ में f ह्रासमान है।

(b) चूँकि प्रत्येक $x \in (\pi, 2\pi)$ के लिए $\sin x < 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) > 0$ और इसलिए $(\pi, 2\pi)$ में f वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0, 2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उदाहरण 10 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f

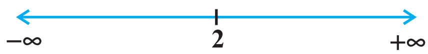
(a) वर्धमान है (b) ह्रासमान है

हल यहाँ

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

या $$f'(x) = 2x - 4$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से $x = 2$ प्राप्त होता है। अब बिंदु $x = 2$ वास्तविक रेखा को दो असंयुक्त अंतरालों, नामत: $(-\infty, 2)$ और $(2, \infty)$ (आकृति 6.3) में विभक्त करता है। अंतराल $(-\infty, 2)$ में $f'(x) = 2x - 4 < 0$ है।



आकृति 6.3

इसलिए, इस अंतराल में, f ह्रासमान है। अंतराल $(2, \infty)$, में $f'(x) > 0$ है, इसलिए इस अंतराल में फलन f वर्धमान है।

उदाहरण 11 वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f, (a) वर्धमान (b) ह्रासमान है।

हल यहाँ

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

या
$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$
$$= 12(x^2 - x - 6)$$
$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

आकृति 6.4

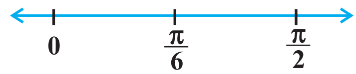
इसलिए $f'(x) = 0$ से $x = -2, 3$ प्राप्त होते हैं। $x = -2$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामत: $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है (आकृति 6.4)।

अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में $f'(x)$ ऋणात्मक है। फलस्वरूप फलन f अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में फलन ह्रासमान है। तथापि f, **R** पर न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिह्न	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f वर्धमान है
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ह्रासमान है
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f वर्धमान है

उदाहरण 12 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें प्रदत्त फलन $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में (a) वर्धमान है। (b) ह्रासमान है।

हल ज्ञात है कि



आकृति 6.5

$$f(x) = \sin 3x$$

या
$$f'(x) = 3\cos 3x$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से मिलता है $\cos 3x = 0$ जिससे $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (क्योंकि $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$) प्राप्त होता है। इसलिए, $x = \frac{\pi}{6}$ और $\frac{\pi}{2}$ है। अब बिंदु $x = \frac{\pi}{6}$, अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ को दो असंयुक्त अंतरालों $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ और $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ में विभाजित करता है।

पुनः सभी $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ के लिए $f'(x) > 0$ क्योंकि $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ और सभी $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $f'(x) < 0$ क्योंकि $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x \le \frac{3\pi}{2}$

इसलिए, अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ में f वर्धमान है और अंतराल $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है। इसके अतिरिक्त दिया गया फलन $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{6}$ पर संतत भी है। इसलिए प्रमेय 1 के द्वारा, f, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ में वर्धमान और $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ में ह्रासमान है।

उदाहरण 13 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, वर्धमान या ह्रासमान है।

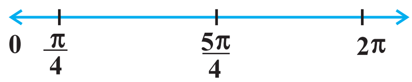
हल ज्ञात है कि

$$f(x) = \sin x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

या
$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

अब $f'(x) = 0$ से $\sin x = \cos x$ जिससे हमें $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि $0 \le x \le 2\pi$,

बिंदु $x=\frac{\pi}{4}$ और $x=\frac{5\pi}{4}$ अंतराल $[0, 2\pi]$ को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामत: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।



आकृति 6.6

ध्यान दीजिए कि $f'(x)>0$ यदि $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

अत: अंतरालों $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x)<0$, यदि $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

अत: f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिह्न	फलन की प्रकृति
$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	>0	f वर्धमान है
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	<0	f ह्रासमान है
$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$	>0	f वर्धमान है

प्रश्नावली 6.2

1. सिद्ध कीजिए **R** पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।
2. सिद्ध कीजिए कि **R** पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।
3. सिद्ध कीजिए $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन

   (a) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है (b) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में ह्रासमान है

   (c) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान

5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान

6. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f वर्धमान या ह्रासमान है:

(a) $f(x)\, x^2 + 2x + 5$ (b) $f(x) 10 - 6x - 2x^2$

(c) $f(x) -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $f(x)\ 6 - 9x - x^2$

(e) $f(x)\ (x + 1)^3\ (x - 3)^3$

7. सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}, x > -1$, अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

8. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ में $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में वर्धमान फलन है।

11. सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ में $f(x) = x^2 - x + 1$ से प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

12. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f ह्रासमान है?

(A) (0,1) (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) इनमें से कोई नही

14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल [1, 2] में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।

15. मान लीजिए [–1, 1] से असंयुक्त एक अंतराल I हो तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f, वर्धमान है।

16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान है।

17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log|\cos x|$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ में ह्रासमान है।

18. सिद्ध कीजिए कि **R** में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

19. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 उच्चतम और निम्नतम (Maxima and Minima)

इस अनुच्छेद में, हम विभिन्न फलनों के उच्चतम और निम्नतम मानों की गणना करने में अवकलज की संकल्पना का प्रयोग करेंगे। वास्तव में हम एक फलन के आलेख के वर्तन बिंदुओं (Turning points) को ज्ञात करेंगे और इस प्रकार उन बिंदुओं को ज्ञात करेंगे जिन पर आलेख स्थानीय अधिकतम (या न्यूनतम) पर पहुँचता है। इस प्रकार के बिंदुओं का ज्ञान एक फलन का आलेख खींचने में बहुत उपयोगी होता है। इसके अतिरिक्त हम एक फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान (Absolute maximum value) ओर निरपेक्ष न्यूनतम मान (Absolute minimum value) भी ज्ञात करेंगे जो कई अनुप्रयुक्त समस्याओं के हल के लिए आवश्यक हैं।

आइए हम दैनिक जीवन की निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करें

(i) संतरों के वृक्षों के एक बाग से होने वाला लाभ फलन $P(x) = ax + bx^2$ द्वारा प्रदत्त है जहाँ a, b अचर हैं और x प्रति एकड़ में संतरे के वृक्षों की संख्या है। प्रति एकड़ कितने वृक्ष अधिकतम लाभ देगें?

(ii) एक 60 m ऊँचे भवन से हवा में फेंकी गई एक गेंद $h(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ के द्वारा निर्धारित पथ के अनुदिश चलती है, जहाँ x भवन से गेंद की क्षैतिज दूरी और $h(x)$ उसकी ऊँचाई है। गेंद कितनी अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचेगी?

(iii) शत्रु का एक अपाचे हेलिकॉप्टर वक्र $f(x) = x^2 + 7$ द्वारा प्रदत्त पथ के अनुदिश उड़ रहा है। बिंदु (1, 2) पर स्थित एक सैनिक उस हेलिकॉप्टर को गोली मारना चाहता है जब हेलिकॉप्टर उसके निकटतम हो। यह निकटतम दूरी कितनी है?

उपर्युक्त समस्याओं में कुछ सर्वसामान्य है अर्थात् हम प्रदत्त फलनों के उच्चतम अथवा निम्नतम मान ज्ञात करना चाहते हैं। इन समस्याओं को सुलझाने के लिए हम विधिवत एक फलन का अधिकतम मान या न्यूनतम मान व स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम के बिंदुओं और इन बिंदुओं को निर्धारित करने के परीक्षण को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 3 मान लीजिए एक अंतराल I में एक फलन f परिभाषित है, तब

(a) f का उच्चतम मान I में होता है, यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f(c) \geq f(x)$, $\forall\ x \in$ I

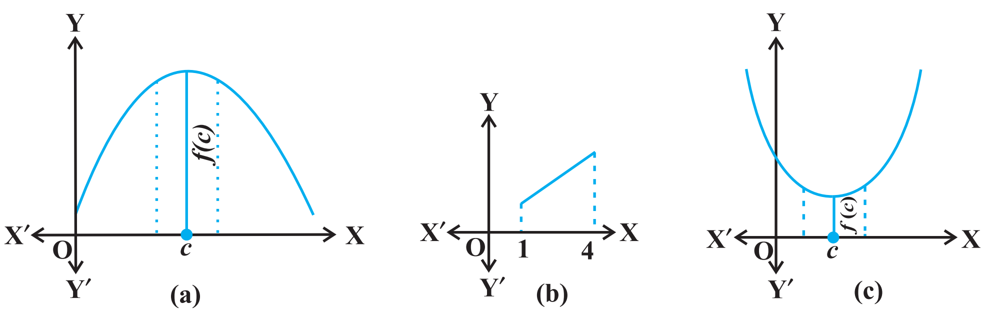
संख्या $f(c)$ को I में f का उच्चतम मान कहते हैं और बिंदु c को I में f के उच्चतम मान वाला बिंदु कहा जाता है।

(b) f का निम्नतम मान I में होता है यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व है इस प्रकार कि $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in$ I

संख्या $f(c)$ को I में f का निम्नतम मान कहते हैं और बिंदु c को I में f के निम्नतम मान वाला बिंदु कहा जाता है।

(c) I में f एक चरम मान (extreme value) रखने वाला फलन कहलाता है यदि I में एक ऐसे बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f(c)$, f का उच्चतम मान अथवा निम्नतम मान है।

इस स्थिति में $f(c)$, I में f का चरम मान कहलाता है और बिंदु c एक चरम बिंदु कहलाता है।



आकृति 6.7

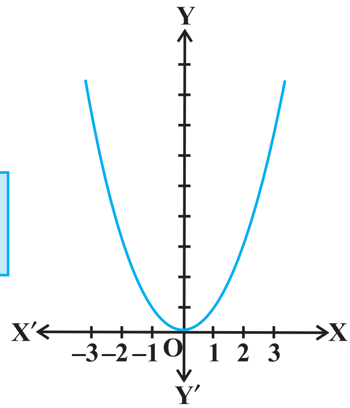
> **टिप्पणी** आकृति 6.7 (a), (b) और (c) में हमने कुछ विशिष्ट फलनों के आलेख प्रदर्शित किए हैं जिनसे हमें एक बिंदु पर उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात करने में सहायता मिलती है। वास्तव में आलेखों से हम उन फलनों के जो अवकलित नहीं होते हैं। उच्चतम / निम्नतम मान भी ज्ञात कर सकते हैं, (उदाहरण 27)।

उदाहरण 14 $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ से प्रदत्त फलन f के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए फलन के आलेख (आकृति 6.8) से हम कह सकते हैं कि $f(x) = 0$ यदि $x = 0$ है और

$$f(x) \geq 0, \text{ सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए।}$$

इसलिए, f का निम्नतम मान 0 है और f के निम्नतम मान का बिंदु $x = 0$ है। इसके अतिरिक्त आलेख से यह भी देखा जा सकता है कि फलन f का कोई उच्चतम मान नहीं है, अत: **R** में f के उच्चतम मान का बिंदु नहीं है।



आकृति 6.8

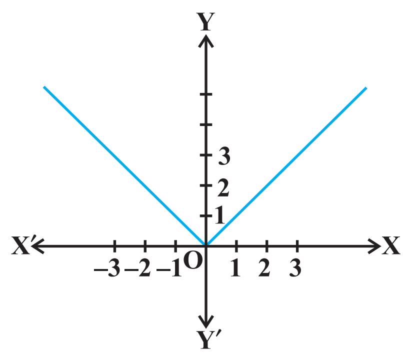
टिप्पणी यदि हम फलन के प्रांत को केवल $[-2, 1]$ तक सीमित करें तब $x = -2$ पर f का उच्चतम मान $(-2)^2 = 4$ है।

उदाहरण 15 $f(x) = |x|,\ x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए फलन के आलेख (आकृति 6.9) से

$f(x) \geq 0$, सभी $x \in \mathbf{R}$ और $f(x) = 0$ यदि $x = 0$ है।

इसलिए, f का निम्नतम मान 0 है और f के निम्नतम मान का बिंदु $x = 0$ है। और आलेख से यह भी स्पष्ट है **R** में f का कोई उच्चतम मान नहीं है। अत: **R** में कोई उच्चतम मान का बिंदु नहीं है।



आकृति 6.9

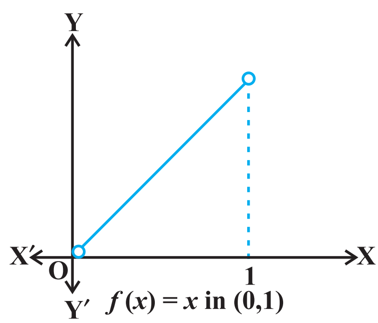
टिप्पणी

(i) यदि हम फलन के प्रांत को केवल $[-2, 1]$ तक सीमित करें, तो f का उच्चतम मान $|-2| = 2$ होगा।

(ii) उदाहरण 27 में ध्यान दें कि फलन f, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 16 $f(x) = x,\ x \in (0, 1)$ द्वारा प्रदत्त फलन के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए अंतराल $(0, 1)$ में दिया फलन एक निरंतर वर्धमान फलन है। फलन f के आलेख (आकृति 6.10) से ऐसा प्रतीत होता है कि फलन का निम्नतम मान 0 के दायीं ओर के निकटतम बिंदु और उच्चतम मान 1 के बायीं ओर के निकटतम बिंदु पर होना चाहिए। क्या ऐसे बिंदु उपलब्ध हैं? ऐसे बिंदुओं को अंकित करना संभव नहीं है। वास्तव में, यदि 0 का निकटतम बिंदु x_0 हो तो $\frac{x_0}{2} < x_0$ सभी $x_0 \in (0,1)$



आकृति 6.10

के लिए और यदि 1 का निकटतम बिंदु x_1 हो तो सभी $x_1 \in (0,1)$ के लिए $\frac{x_1+1}{2} > x_1$ है।

इसलिए दिए गए फलन का अंतराल (0, 1) में न तो कोई उच्चतम मान है और न ही कोई निम्नतम मान है।

टिप्पणी पाठक देख सकते हैं कि उदाहरण 28 में यदि f के प्रांत में 0 और 1 को सम्मिलित कर लिया जाए अर्थात f के प्रांत को बढ़ाकर [0, 1] कर दिया जाए तो फलन का निम्नतम मान $x = 0$ पर 0 और उच्चतम मान $x = 1$ पर 1 है। वास्तव में हम निम्नलिखित परिणाम पाते हैं (इन परिणामों की उपपत्ति इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर है)।

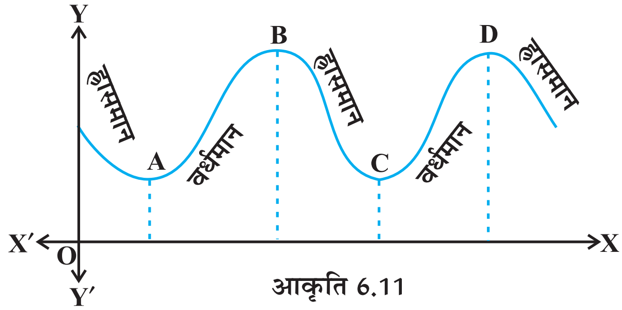
प्रत्येक एकदिष्ट (monotonic) फलन अपने परिभाषित प्रांत के अंत्य बिंदुओं पर उच्चतम/निम्नतम ग्रहण करता है।

इस परिणाम का अधिक व्यापक रूप यह है कि संवृत्त अंतराल पर प्रत्येक संतत फलन के उच्चतम और निम्नष्ठ मान होते हैं।

टिप्पणी किसी अंतराल I में एकदिष्ट फलन से हमारा अभिप्राय है कि I में फलन या तो वर्धमान है या ह्रासमान है।

इस अनुच्छेद में एक संवृत्त अंतराल पर परिभाषित फलन के उच्चतम और निम्नतम मानों के बारे में बाद में विचार करेंगे।

आइए अब आकृति 6.11 में दर्शाए गए किसी फलन के आलेख का अध्ययन करें। देखिए कि फलन का आलेख बिंदुओं A, B, C तथा D पर वर्धमान से ह्रासमान या विलोमतः ह्रासमान से वर्धमान होता है। इन बिंदुओं को फलन के वर्तन बिंदु कहते हैं। पुनः ध्यान दीजिए कि वर्तन बिंदुओं पर आलेख में एक छोटी पहाड़ी या छोटी घाटी बनती है। मोटे तौर पर बिंदुओं A तथा C में से प्रत्येक के सामीप्य (Neighbourhood)में फलन का निम्नतम मान है, जो उनकी अपनी-अपनी घाटियों के अधोभागों (Bottom) पर है। इसी प्रकार बिंदुओं B तथा D में से प्रत्येक के सामीप्य में फलन का उच्चतम मान है, जो उनकी अपनी-अपनी पहाड़ियों के शीर्षों पर है। इस कारण से बिंदुओं A तथा C को स्थानीय



आकृति 6.11

निम्नतम मान (या सापेक्ष निम्नतम मान) का बिंदु तथा B और D को स्थानीय उच्चतम मान (या सापेक्ष उच्चतम मान) के बिंदु समझा जा सकता है। फलन के स्थानीय उच्चतम मान और स्थानीय निम्नतम मानों को क्रमशः फलन का स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम कहा जाता है।

अब हम औपचारिक रूप से निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।

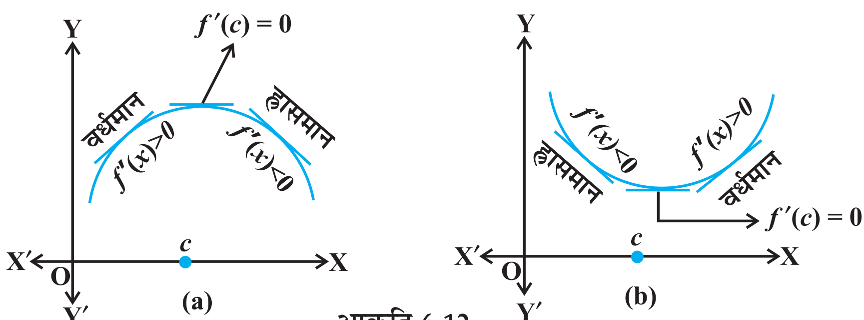
परिभाषा 4 मान लीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है और c फलन f के प्रांत में एक आंतरिक बिंदु है। तब

(a) c को स्थानीय उच्चतम का बिंदु कहा जाता है यदि एक ऐसा $h > 0$ है कि $(c-h, c+h)$ में सभी x के लिए $f(c) \geq f(x)$ हो। तब $f(c)$, फलन f का स्थानीय उच्चतम मान कहलाता है।

(b) c को स्थानीय निम्नतम का बिंदु कहा जाता है यदि एक ऐसा $h > 0$ है कि $(c-h, c+h)$ में सभी x के लिए $f(c) \leq f(x)$ हो। तब $f(c)$, फलन f का स्थानीय निम्नतम मान कहलाता है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण से, उपर्युक्त परिभाषा का अर्थ है कि यदि $x = c$, फलन f का स्थानीय उच्चतम का बिंदु है, तो c के आसपास का आलेख आकृति 6.12(a) के अनुसार होगा। ध्यान दीजिए कि अंतराल $(c-h, c)$ में फलन f वर्धमान (अर्थात् $f'(x) > 0$) और अंतराल $(c, c+h)$ में फलन ह्रासमान (अर्थात् $f'(x) < 0$) है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $f'(c)$ अवश्य ही शून्य होना चाहिए।



आकृति 6.12

इसी प्रकार, यदि c, फलन f का स्थानीय निम्नतम बिंदु है तो c के आसपास का आलेख आकृति 6.14(b) के अनुसार होगा। यहाँ अंतराल $(c-h, c)$ में f ह्रासमान (अर्थात् $f'(x) < 0$) है और अंतराल $(c, c+h)$ में f वर्धमान (अर्थात, $f'(x) > 0$) है। यह पुनः सुझाव देता है कि $f'(c)$ अवश्य ही शून्य होना चाहिए।

उपर्युक्त परिचर्चा से हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है (बिना उपपत्ति)।

प्रमेय 2 मान लीजिए एक विवृत्त अंतराल I में f एक परिभाषित फलन है। मान लीजिए $c \in$ I कोई बिंदु है। यदि f का $x = c$ पर एक स्थानीय उच्चतम या एक स्थानीय निम्नतम का बिंदु है तो $f'(c) = 0$ है या f बिंदु c पर अवकलनीय नहीं है।

टिप्पणी उपरोक्त प्रमेय का विलोम आवश्यक नहीं है कि सत्य हो जैसे कि एक बिंदु जिस पर अवकलज शून्य हो जाता है तो यह आवश्यक नहीं है कि वह स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। उदाहरणतया यदि $f(x) = x^3$ हो तो $f'(x) = 3x^2$ और इसलिए $f'(0) = 0$ है। परन्तु 0 न तो स्थानीय उच्चतम और न ही स्थानीय निम्नतम बिंदु है। आकृति 6.15

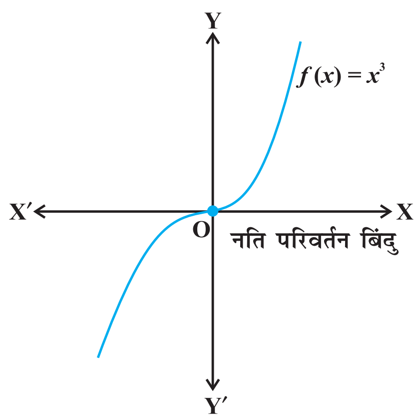
टिप्पणी फलन f के प्रांत में एक बिंदु c, जिस पर या तो $f'(c) = 0$ है या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु (Critical Point) कहलाता है। ध्यान दीजिए कि यदि f बिंदु c पर संतत है और $f'(c) = 0$ है तो यहाँ एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि अंतराल $(c - h, c + h)$ में f अवकलनीय है।

अब हम केवल प्रथम अवकलजों का प्रयोग करके स्थानीय उच्चतम बिंदु या स्थानीय निम्नतम बिंदुओं को ज्ञात करने की क्रियाविधि प्रस्तुत करेंगे।

प्रमेय 3 (प्रथम अवकलज परीक्षण) मान लीजिए कि एक फलन f किसी विवृत्त अंतराल I पर परिभाषित है। मान लीजिए कि f अंतराल I में स्थित क्रांतिक बिंदु c पर संतत है। तब

(i) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ-साथ, यदि $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात् यदि बिंदु c के बायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) > 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) < 0$ हो तो c स्थानीय उच्चतम एक बिंदु है।

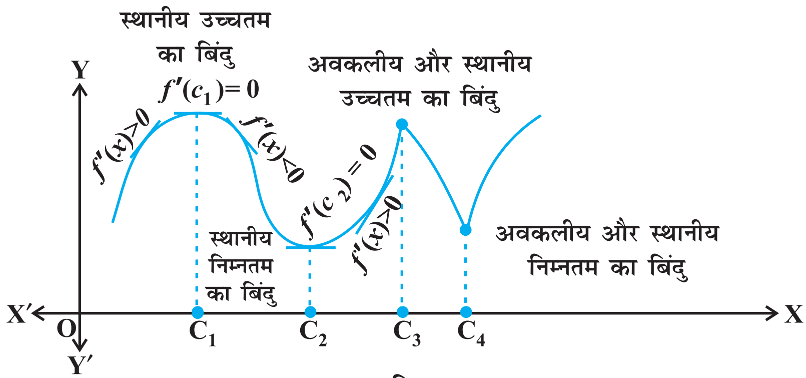
(ii) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ-साथ यदि $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है, अर्थात् यदि बिंदु c के बायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) < 0$ तथा c के दायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) > 0$ हो तो c स्थानीय निम्नतम बिंदु है।



आकृति 6.13

(iii) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ यदि $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है, तो c न तो स्थानीय उच्चतम बिंदु है और न स्थानीय निम्नतम बिंदु। वास्तव में, इस प्रकार के बिंदु को नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflection) (आकृति 6.13) कहते हैं।

टिप्पणी यदि c फलन f का एक स्थानीय उच्चतम बिंदु है तो $f(c)$ फलन f का स्थानीय उच्चतम मान है। इसी प्रकार, यदि c फलन f का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु है, तो $f(c)$ फलन f का स्थानीय निम्नतम मान है। आकृतियाँ 6.13 और 6.14 प्रमेय 3 की ज्यामितीय व्याख्या करती है।



आकृति 6.14

उदाहरण 17 $f(x) = x^3 - 3x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन के लिए स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

या $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

या $$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ और } x = -1$$

इस प्रकार, केवल $x = \pm 1$ ही ऐसे क्रांतिक बिंदु हैं जो f के स्थानीय उच्चतम और/या स्थानीय निम्नतम संभावित बिंदु हो सकते हैं। पहले हम $x = 1$ पर परीक्षण करते हैं।

ध्यान दीजिए कि 1 के निकट और 1 के दायीं ओर $f'(x) > 0$ है और 1 के निकट और 1 के बायीं ओर $f'(x) < 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 1$, स्थानीय निम्नतम बिंदु है और स्थानीय निम्नतम मान $f(1) = 1$ है।

$x = -1$ की दशा में, -1 के निकट और -1 के बायीं ओर $f'(x) > 0$ और -1 के निकट और -1 के दायीं ओर $f'(x) < 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = -1$ स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और स्थानीय उच्चतम मान $f(-1) = 5$ है।

x के मान		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ **का चिह्न**
1 के निकट	दायीं ओर (माना 1.1)	>0
	बायीं ओर (माना 0.9)	<0
-1 के निकट	दायीं ओर (माना -0.9)	<0
	बायीं ओर (माना -1.1)	>0

उदाहरण 18 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

या
$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x - 1)^2$$

या
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

इस प्रकार केवल $x = 1$ ही f का क्रांतिक बिंदु है। अब हम इस बिंदु पर f के स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम के लिए परीक्षण करेंगे। देखिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f'(x) \geq 0$ और विशेष रूप से 1 के समीप और 1 के बायीं ओर और दायीं ओर के मानों के लिए $f'(x) > 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण से बिंदु $x = 1$ न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। अत: $x = 1$ एक नति परिवर्तन (inflection) बिंदु है।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि उदाहरण 30 में $f'(x)$ का चिह्न अंतराल $\mathbf{R}$ में कभी भी नहीं बदलता। अत: f के आलेख में कोई भी वर्तन बिंदु नहीं है और इसलिए स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम का कोई भी बिंदु नहीं है।

अब हम किसी प्रदत्त फलन के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के परीक्षण के लिए एक दूसरी क्रियाविधि प्रस्तुत करेंगे। यह परीक्षण प्रथम अवकलज परीक्षण की तुलना में प्राय: सरल है।

प्रमेय 4 मान लीजिए कि f, किसी अंतराल I में परिभाषित एक फलन है तथा $c \in$ I है। मान लीजिए कि f, c पर दो बार लगातार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तो $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है।
इस दशा में f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तो $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है।
इस दशा में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ है।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) = 0$ है तो यह परीक्षण असफल हो जाता है।
इस स्थिति में हम पुन: प्रथम अवकलज परीक्षण पर वापस जाकर यह ज्ञात करते हैं कि c उच्चतम, निम्नतम या नति परिवर्तन का बिंदु है।

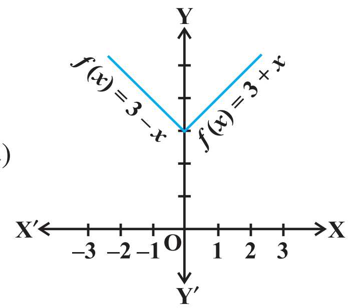
टिप्पणी बिंदु c पर f दो बार लगातार अवकलनीय है इससे हमारा तात्पर्य कि c पर f के द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है।

उदाहरण 19 $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f का स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि दिया गया $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इस प्रकार द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल हो जाता है। अब हम प्रथम अवकलज परीक्षण करते हैं। नोट कीजिए कि 0 फलन f का एक

क्रांतिक बिंदु है। अब 0 के बायीं ओर, $f(x) = 3 - x$ और इसलिए $f'(x) = -1 < 0$ है साथ ही 0 के दायीं ओर, $f(x) = 3 + x$ है और इसलिए $f'(x) = 1 > 0$ है। अतएव, प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 0, f$ का स्थानीय निम्नतम बिंदु है तथा f का स्थानीय न्यूनतम मान $f(0) = 3$ है।

उदाहरण 20 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.15

हल यहाँ

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

या $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$

या $x = 0, x = 1$ और $x = -2$ पर $f'(x) = 0$ है।

अब $$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$$

अतः $$\begin{cases} f''(0) = -24 < 0 \\ f''(1) = 36 > 0 \\ f''(-2) = 72 > 0 \end{cases}$$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 0$ स्थानीय उच्चतम बिंदु है और f का स्थानीय उच्चतम मान $f(0) = 12$ है। जबकि $x = 1$ और $x = -2$ स्थानीय निम्नतम बिंदु है और स्थानीय निम्नतम मान $f(1) = 7$ और $f(-2) = -20$ है।

उदाहरण 21 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

या $$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

अब $f'(x) = 0$ से $x = -1$ प्राप्त होता है। तथा $f''(1) = 0$ है। इसलिए यहाँ द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल है। अतः हम प्रथम अवकलज परीक्षण की ओर वापस जाएँगे।

हमने पहले ही (उदाहरण 30) में देखा है कि प्रथम अवकलज परीक्षण की दृष्टि से $x = 1$ न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु है अपितु यह नति परिवर्तन का बिंदु है।

उदाहरण 22 ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम हो।

हल मान लीजिए पहली संख्या x है तब दूसरी संख्या $15 - x$ है। मान लीजिए इन संख्याओं के वर्गों का योग $S(x)$ से व्यक्त होता है। तब

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

या
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

अब $S'(x) = 0$ से $x = \frac{15}{2}$ प्राप्त होता है तथा $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ है। इसलिए द्वितीय अवकलज परीक्षण द्वारा S के स्थानीय निम्नतम का बिंदु $x = \frac{15}{2}$ है। अत: जब संख्याएँ $\frac{15}{2}$ और $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ हो तो संख्याओं के वर्गों का योग निम्नतम होगा।

टिप्पणी उदाहरण 22 की भाँति यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसी दो घन संख्याएँ जिनका योग k है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम हो तो ये संख्याएँ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ होंगी।

उदाहरण 23 बिंदु $(0, c)$ से परवलय $y = x^2$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ $\frac{1}{2} \le c \le 5$ है।

हल मान लीजिए परवलय $y = x^2$ पर (h, k) कोई बिंदु है। मान लीजिए (h, k) और $(0, c)$ के बीच दूरी D है। तब

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad \ldots (1)$$

क्योंकि (h, k) परवलय $y = x^2$ पर स्थित है अत: $k = h^2$ है। इसलिए (1) से

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

या
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

अब $D'(k) = 0$ से $k = \frac{2c-1}{2}$ प्राप्त होता है

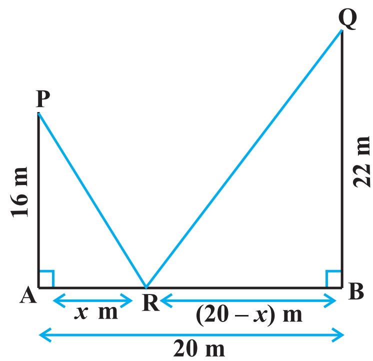
ध्यान दीजिए कि जब $k < \frac{2c-1}{2}$, तब $2(k-c) + 1 < 0$, अर्थात् $D'(k) < 0$ है तथा जब $k > \frac{2c-1}{2}$

तब $2(k-c)+1>0$ है अर्थात् $D'(k)>0$ (इस प्रकार प्रथम अवकलज परीक्षण से $k=\frac{2c-1}{2}$ पर k निम्नतम है। अतः अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2c-1}{2}+\left(\frac{2c-1}{2}-c\right)^2}=\frac{\sqrt{4c-1}}{2} \text{ है।}$$

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि उदाहरण 23 में हमने द्वितीय अवकलज परीक्षण के स्थान पर प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग किया है क्योंकि यह सरल एवं छोटा है।

उदाहरण 24 मान लीजिए बिंदु A और B पर क्रमशः AP तथा BQ दो उर्ध्वाधर स्तंभ है। यदि AP = 16 m, BQ = 22 m और AB = 20 m हों तो AB पर एक ऐसा बिंदु R ज्ञात कीजिए ताकि $RP^2 + RQ^2$ निम्नतम हो।



आकृति 6.16

हल मान लीजिए AB पर एक बिंदु R इस प्रकार है कि AR = x m है। तब RB = $(20 - x)$ m (क्योंकि AB = 20 m) आकृति 6.16 से

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

और $$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

इसलिए $$RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

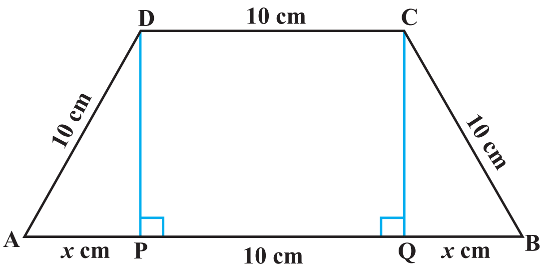
मान लीजिए कि $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$ है।

अतः $S'(x) = 4x - 40$ है।

अब $S'(x) = 0$ से $x = 10$ प्राप्त होता है और सभी x के लिए $S''(x) = 4 > 0$ है और इसलिए $S''(10) > 0$ है। इसलिए द्वितीय अवकलज परीक्षण से $x = 10$, S का स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। अतः AB पर R की A से दूरी AR = x = 10 m है।

उदाहरण 25 यदि एक समलंब चतुर्भुज के आधार के अतिरिक्त तीनों भुजाओं की लंबायीं 10 cm है तब समलंब चतुर्भुज का अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट समलंब को आकृति 6.17 में दर्शाया गया है। AB पर DP तथा CQ लंब खींचिए। मान लीजिए AP $= x$ cm है। ध्यान दीजिए कि $\Delta APD \cong \Delta BQC$ है इसलिए QB $= x$ cm है। और पाइथागोरस प्रमेय से, DP = QC = $\sqrt{100-x^2}$ है। मान लीजिए समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल A **है।**



आकृति 6.17

अतः $$A \equiv A(x)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{समांतर भुजाओं का योग})(\text{ऊँचाई})$$

$$= \frac{1}{2}(2x+10+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= (x+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

या $$A'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

अब $A'(x) = 0$ से $2x^2 + 10x - 100 = 0$, जिससे $x = 5$ और $x = -10$ प्राप्त होता है। क्योंकि x दूरी को निरूपित करता है इसलिए यह ऋण नहीं हो सकता है। इसलिए $x = 5$ है। अब

$$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3-300x-1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{सरल करने पर})$$

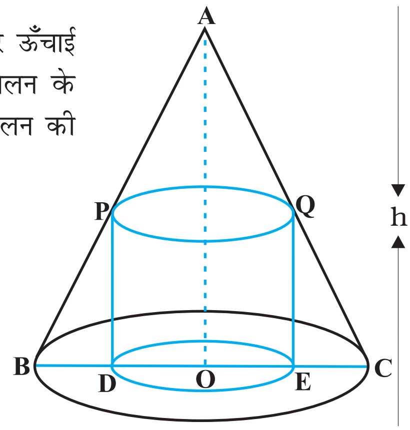
अतः $$A''(5) = \frac{2(5)^3-300(5)-1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

इस प्रकार, $x = 5$ पर समलंब का क्षेत्रफल अधिकतम है और अधिकतम क्षेत्रफल

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ है।}$$

उदाहरण 26 सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

हल मान लीजिए शंकु के आधार की त्रिज्या OC = r और ऊँचाई OA = h है। मान लीजिए कि दिए हुए शंकु के अंतर्गत बेलन के आधार के वृत्त की त्रिज्या OE = x है (आकृति 6.18)। बेलन की ऊँचाई QE के लिए:



आकृति 6.18

$$\frac{\text{QE}}{\text{OA}} = \frac{\text{EC}}{\text{OC}} \quad (\text{क्योंकि } \Delta\text{QEC} \sim \Delta\text{AOC})$$

या $$\frac{\text{QE}}{h} = \frac{r-x}{r}$$

या $$\text{QE} = \frac{h(r-x)}{r}$$

मान लीजिए बेलन का वक्रपृष्ठ S है । तब

$$\text{S} \equiv \text{S}(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

या $$\begin{cases} \text{S}'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ \text{S}''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

अब $\text{S}'(x) = 0$ से $x = \frac{r}{2}$ प्राप्त होता है। क्योंकि सभी x के लिए $\text{S}''(x) < 0$ है। अत: $\text{S}''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ है। इसलिए $x = \frac{r}{2}$, S का उच्चतम बिंदु है। अत: दिए शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ के बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

6.4.1 *एक संवृत्त अंतराल में किसी फलन का उच्चतम और निम्नतम मान (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)*

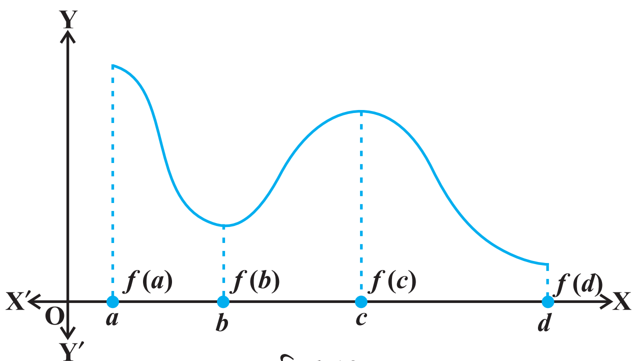
मान लीजिए $f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ द्वारा प्रदत्त एक प्रलन f है।

ध्यान दीजिए कि (0, 1) पर फलन संतत है और इस अंतराल में न तो इसका कोई उच्चतम मान है और न ही इसका कोई निम्नतम मान है।

तथापि, यदि हम f के प्रांत को संवृत्त अंतराल [0, 1] तक बढ़ा दें तब भी f का शायद कोई स्थानीय उच्चतम (निम्नतम) मान नहीं होगा परंतु इसका निश्चित ही उच्चतम मान $3 = f(1)$ और

निम्नतम मान $2 = f(0)$ हैं। $x = 1$ पर f का उच्चतम मान 3, [0, 1] पर f का निरपेक्ष उच्चतम मान (महत्तम मान) (absolute maximum value) या सार्वत्रिक अधिकतम मान (global maximum or greatest value) कहलाता है। इसी प्रकार, $x = 0$ पर f का निम्नतम मान 2, [0, 1] पर f का निरपेक्ष निम्नतम मान (न्यूनतम मान) (absolute minimum value) या सार्वत्रिक न्यूनतम मान (global minimum or least value) कहलाता है।

एक संवृत्त अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित किसी संतत फलन f के संगत आकृति 6.19 में प्रदर्शित आलेख पर विचार कीजिए कि $x = b$ पर फलन f का स्थानीय निम्नतम है तथा स्थानीय निम्नतम मान $f(b)$ है। फलन का $x = c$ पर स्थानीय उच्चतम बिंदु है तथा स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।



आकृति 6.19

साथ ही आलेख से यह भी स्पष्ट है कि f का निरपेक्ष उच्चतम मान $f(a)$ तथा निरपेक्ष निम्नतम मान $f(d)$ है। इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि f का निरपेक्ष उच्चतम (निम्नतम) मान स्थानीय उच्चतम (निम्नतम) मान से भिन्न है।

अब हम एक संवृत्त अंतराल I में एक फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम के विषय में दो परिणामों (बिना उपपत्ति) के कथन बताएँगे।

प्रमेय 5 मान लीजिए एक अंतराल $I = [a, b]$ पर f एक संतत फलन है। तब f का निरपेक्ष उच्चतम मान होता है और I में कम से कम एक बार f यह मान प्राप्त करता है तथा f का निरपेक्ष निम्नतम मान होता है और I में कम से कम एक बार f यह मान प्राप्त करता है।

प्रमेय 6 मान लीजिए संवृत्त अंतराल I पर f एक अवकलनीय फलन है और मान लीजिए कि I का कोई आंतरिक बिंदु c है। तब

(i) यदि c पर f निरपेक्ष उच्चतम मान प्राप्त करता है, तो $f'(c) = 0$

(ii) यदि c पर f निरपेक्ष निम्नतम मान प्राप्त करता है, तो $f'(c) = 0$

उपर्युक्त प्रमेयों के विचार से, दिए गए संवृत्त अंतराल में किसी फलन के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करने के लिए विधि निम्नलिखित हैं।

व्यावहारिक विधि (Working Rule)

चरण 1: दिए गए अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए अर्थात् x के वह सभी मान ज्ञात कीजिए जहाँ या तो $f'(x) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है।

चरण 2: अंतराल के अंत्य बिंदु लीजिए।

चरण 3: इन सभी बिंदुओं पर (चरण 1 व 2 में सूचीबद्ध) f के मानों की गणना कीजिए।

चरण 4: चरण 3 में गणना से प्राप्त f के मानों में से उच्चतम और निम्नतम मानों को लीजिए। यही उच्चतम मान, f का निरपेक्ष उच्चतम मान और निम्नतम मान, f का निरपेक्ष निम्नतम मान होंगे।

उदाहरण 27 अंतराल $[1, 5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

या

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 3)(x - 2)$$

ध्यान दीजिए $f'(x) = 0$ से $x = 2$ और $x = 3$ प्राप्त होते हैं।

अब हम इन बिंदुओं और अंतराल $[1, 5]$ के अंत्य बिंदुओं अर्थात् $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ और $x = 5$ पर f के मान का परिकलन करेंगे। अब:

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$

$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$

$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$

$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

इस प्रकार, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि अंतराल $[1, 5]$ पर फलन f के लिए $x = 5$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 56 और $x = 1$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान 24 है।

उदाहरण 28 $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}, x \in [-1, 1]$ द्वारा प्रदत्त एक फलन f के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

या

$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x - 1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

इस प्रकार $f'(x) = 0$ से $x = \frac{1}{8}$ प्राप्त होता है। और ध्यान दीजिए कि $x = 0$ पर $f'(x)$ परिभाषित नहीं है। इसलिए क्रांतिक बिंदु $x = 0$ और $x = \frac{1}{8}$ हैं। अब क्रांतिक बिंदुओं $x = 0, \frac{1}{8}$ और अंतराल के अंत्य बिंदुओं $x = -1$ व $x = 1$ पर फलन f के मान का परिकलन करने से

$$f(-1) = 12(-1^{\frac{4}{3}}) - 6(-1^{\frac{1}{3}}) = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1^{\frac{4}{3}}) - 6(1^{\frac{1}{3}}) = 6$$

प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि $x = -1$ पर f का निरपेक्ष उच्चतम मान 18 है और $x = \frac{1}{8}$ पर f का निरपेक्ष निम्नतम मान $\frac{-9}{4}$ है।

उदाहरण 29 शत्रु का एक अपाचे हेलिकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है। बिंदु $(3, 7)$ पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से न्यूनतम दूरी पर उस हेलिकॉप्टर को गोली मारना चाहता है। न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल x के प्रत्येक मान के लिए हेलिकॉप्टर की स्थिति बिंदु $(x, x^2 + 7)$ है। इसलिए $(3, 7)$ पर स्थित सैनिक और हेलिकॉप्टर के बीच दूरी $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$, अर्थात् $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ है।

मान लीजिए कि $\quad f(x) = (x-3)^2 + x^4$

या $\quad f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$

इसलिए $f'(x) = 0$ से $x = 1$ प्राप्त होता है तथा $2x^2 + 2x + 3 = 0$ से कोई वास्तविक मूल प्राप्त नहीं होता है। पुनः अंतराल के अंत्य बिंदु भी नहीं है, जिन्हें उस समुच्चय में जोड़ा जाए जिनके लिए f' का मान शून्य है अर्थात् केवल एक बिंदु, नामतः $x = 1$ ही ऐसा है। इस बिंदु पर f का मान $f(1) = (1-3)^2 + (1)^4 = 5$ से प्रदत्त है। इस प्रकार, सैनिक एवं हेलिकॉप्टर के बीच की दूरी $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt{5}$ या तो उच्चतम मान या निम्नतम मान है। क्योंकि

$$\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5} \text{ है।}$$

इससे यह निष्कर्ष निकला कि $\sqrt{f(x)}$ का निम्नतम मान $\sqrt{5}$ है। अतः सैनिक और हेलिकॉप्टर के बीच की निम्नतम दूरी $\sqrt{5}$ है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई तो, ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हों, तो ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$

(v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$

3. निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चतम या निम्नतम, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम मान, जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(iv) $f(x) = \sin x - \cos x,\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x},\quad x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x},\ 0 < x < 1$

4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलनों का उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है:

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. प्रदत्त अंतरालों में निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. यदि लाभ फलन $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$ से प्रदत्त है तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात कीजिए।

7. अंतराल $[0, 3]$ पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चतम मान ओर निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

8. अंतराल $[0, 2\pi]$ के किन बिंदुओं पर फलन $\sin 2x$ अपना उच्चतम मान प्राप्त करता है?

9. फलन $\sin x + \cos x$ का उच्चतम मान क्या है?

10. अंतराल [1, 3] में $2x^3 - 24x + 107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। इसी फलन का अंतराल [–3, –1] में भी महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि दिया है कि अंतराल [0, 2] में $x = 1$ पर फलन $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ उच्चतम मान प्राप्त करता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

12. $[0, 2\pi]$ पर $x + \sin 2x$ का उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

13. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

14. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए ताकि $x + y = 60$ और xy^3 उच्चतम हो।

15. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 हो और गुणनफल $x^2 y^5$ उच्चतम हो।

16. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 16 हो और जिनके घनों का योग निम्नतम हो।

17. 18 cm भुजा के टिन के किसी वर्गाकार टुकड़े से प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़ कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो?

18. 45 cm × 24 cm की टिन की आयताकार चादर के कोनों पर वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो।

19. सिद्ध किजिए कि एक दिए वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।

20. सिद्ध किजिए कि प्रदत्त पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है।

21. 100 cm^3 आयतन वाले डिब्बे सभी बंद बेलनाकार (लंब वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज्ञात किजिए।

22. एक 28 cm लंबे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया जाना है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे वे वृत्त बनाया जाना है। दोनों टुकड़ों की लंबायीं कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो?

23. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

24. सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है।

25. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

26. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लंब वृत्तीय शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

प्रश्न संख्या 27 से 29 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

27. वक्र $x^2 = 2y$ पर (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिंदु है:

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(2, 2)$

28. x, के सभी वास्तविक मानों के लिए $\dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ का न्यूनतम मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ का उच्चतम मान है:

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

विविध उदाहरण

उदाहरण 30 एक कार समय $t = 0$ पर बिंदु P से चलना प्रारंभ करके बिंदु Q पर रुक जाती है। कार द्वारा t सेकंड में तय की दूरी, x मीटर में

$$x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right) \text{ द्वारा प्रदत्त है।}$$

कार को Q तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए और P तथा Q के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए t सेकंड में कार का वेग v है।

अब $$x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$$

या $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4 - t)$$

इस प्रकार $v = 0$ से $t = 0$ या $t = 4$ प्राप्त होते हैं।

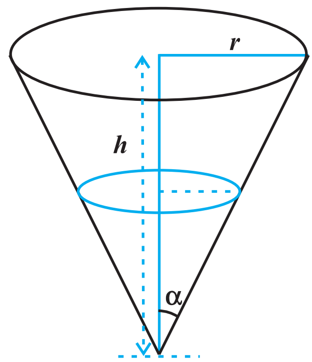
अब P और Q पर कार का वेग $v = 0$ है। इसलिए Q पर कार 4 सेकंडों में पहुँचेगी। अब 4 सेकंडों में कार द्वारा तय की गई दूरी निम्नलिखित है:

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ m}$$

उदाहरण 31 पानी की एक टंकी का आकार, उर्ध्वाधर अक्ष वाले एक उल्टे लंब वृत्तीय शंकु है जिसका शीर्ष नीचे है। इसका अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(0.5)$ है। इसमें 5 m^3/min की दर से पानी भरा जाता है। पानी के स्तर के बढ़ने की दर उस क्षण ज्ञात कीजिए जब टंकी में पानी की ऊँचाई 10 m है।

हल मान लीजिए कि r, h और α आकृति 6.20 के अनुसार है। तब

$\tan\alpha = \frac{r}{h}$ है।



आकृति 6.20

इसलिए $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = \tan^{-1}(0.5) \quad \text{(दिया है)}$$

अतः $$\frac{r}{h} = 0.5 \text{ या } r = \frac{h}{2}$$

मान लीजिए शंकु का आयतन V है। तब

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

अतः $$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt} \quad \text{(श्रृंखला नियम द्वारा)}$$

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

अब आयतन के परिवर्तन की दर अर्थात् $\frac{dV}{dt} = 5 \text{ cm}^3/\text{min}$ और $h = 4$ m है।

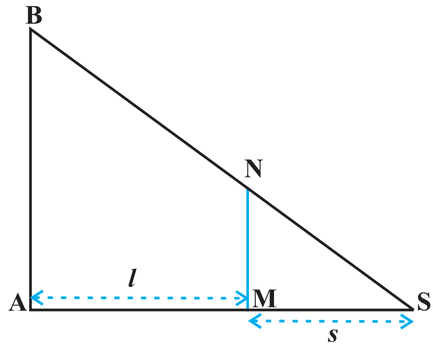
इसलिए $$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

या $$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88} \text{ m/min} \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

अतः पानी के स्तर के उठने की दर $\frac{35}{88}$ m/min है।

उदाहरण 32 2 m ऊँचाई का आदमी 6 m ऊँचे बिजली के खंभे से दूर 5 km/h की समान चाल से चलता है। उसकी छाया की लंबायीं की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 6.21 में, मान लीजिए, AB एक बिजली का खंभा है। B बिंदु पर बल्ब है और मान लीजिए कि एक विशेष समय t पर आदमी MN है। मान लीजिए AM = l m और व्यक्ति की छाया MS है। और मान लीजिए MS = s m है।



आकृति 6.21

ध्यान दीजिए कि ΔASB ~ ΔMSN

या $$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

या $$AS = 3s$$

[(क्योंकि MN = 2 m और AB = 6 m (दिया है)]

इस प्रकार AM = $3s - s = 2s$ है। परन्तु AM = l मीटर है।

इसलिए $$l = 2s$$

अत: $$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

क्योंकि $\frac{dl}{dt} = 5$ km/h है। अत: छाया की लंबायीं में वृद्धि $\frac{5}{2}$ km/h की दर से होती है।

उदाहरण 33 उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान है।

हल हमें ज्ञात है कि

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

या $$f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3) \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

आकृति 6.22

अब $f'(x) = 0$ से $x = 1, x = -2$, और $x = 3$ प्राप्त होते हैं। $x = 1, -2$, और 3 वास्तविक रेखा को चार असंयुक्त अंतरालों नामतः $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है। (आकृति 6.22)

अंतराल $(-\infty, -2)$ को लीजिए अर्थात् जब $-\infty < x < -2$ है।

इस स्थिति में हम $x - 1 < 0, x + 2 < 0$ और $x - 3 < 0$ प्राप्त करते हैं।

(विशेष रूप से $x = -3$ के लिए देखिए कि, $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ $= (-4)(-1)(-6) < 0$) इसलिए, जब $-\infty < x < -2$ है, तब $f'(x) < 0$ है।

अतः $(-\infty, -2)$ में फलन f ह्रासमान है।

अंतराल $(-2, 1)$, को लीजिए अर्थात् जब $-2 < x < 1$ है।

इस दशा में $x - 1 < 0, x + 2 > 0$ और $x - 3 < 0$ है।

(विशेष रूप से $x = 0$, के लिए ध्यान दीजिए कि, $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3) = (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

इसलिए जब $-2 < x < 1$ है, तब $f'(x) > 0$ है।

अतः $(-2, 1)$ में फलन f वर्धमान है।

अब अंतराल $(1,3)$ को लीजिए अर्थात् जब $1 < x < 3$ है। इस दशा में कि $x - 1 > 0, x + 2 > 0$ और $x - 3 < 0$ है।

इसलिए, जब $1 < x < 3$ है, तब $f'(x) < 0$ है।

अतः $(1, 3)$ में फलन f ह्रासमान है। अंत में अंतराल $(3, \infty)$, को लीजिए अर्थात् जब $3 < x < \infty$ है। इस दशा में $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ और $x - 3 > 0$ है। इसलिए जब $x > 3$ है तो $f'(x) > 0$ है।

अतः अंतराल $(3, \infty)$ में फलन f वर्धमान है।

उदाहरण 34 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$ से प्रदत्त फलन f, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

हल यहाँ

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

या
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sin x + \cos x)^2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

ध्यान दीजिए कि $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में सभी x के लिए $2 + \sin 2x > 0$ है।

इसलिए $\quad f'(x) > 0$ यदि $\cos x - \sin x > 0$

या $\quad f'(x) > 0$ यदि $\cos x > \sin x$ या $\cot x > 1$

अब $\quad \cot x > 1$ यदि $\tan x < 1$, अर्थात्, यदि $0 < x < \frac{\pi}{4}$

इसलिए अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में $f'(x) > 0$ है।

अतः $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में f एक वर्धमान फलन है।

उदाहरण 35 3 cm त्रिज्या की एक वृत्ताकार डिस्क को गर्म किया जाता है। प्रसार के कारण इसकी त्रिज्या 0.05 cm/s की दर से बढ़ रही है। वह दर ज्ञात कीजिए जिससे इसका क्षेत्रफल बढ़ रहा है जब इसकी त्रिज्या 3.2 cm है।

हल मान लीजिए कि दी गई तश्तरी की त्रिज्या r और इसका क्षेत्रफल A है।

तब
$$A = \pi r^2$$

या
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(श्रृंखला नियम द्वारा)}$$

अब त्रिज्या की वृद्धि की सन्निकट दर $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05$ cm/s है।

इसलिए क्षेत्रफल में वृद्धि की सन्निकट दर निम्नांकित है

$$dA = \frac{dA}{dt}(\Delta t)$$

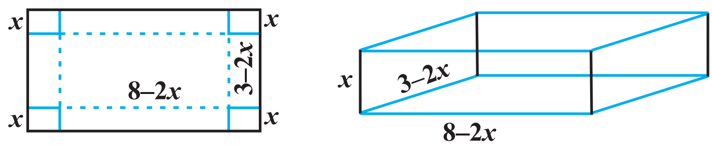
$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right) = 2\pi r\,(dr)$$

$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) \qquad (r = 3.2 \text{ cm})$$

$$= 0.320\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

उदाहरण 36 ऐल्यूमिनियम की 3 m × 8 m की आयताकार चादर के प्रत्येक कोने से समान वर्ग काटने पर बने एल्यूमिनियम के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। इस प्रकार बने संदूक का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि अलग किए गए वर्ग की भुजा की लंबायीं x m है, तब बाक्स की ऊँचाई x, लंबायीं $8 - 2x$ और चौड़ाई $3 - 2x$ (आकृति 6.23) है। यदि संदूक का आयतन V(x) है तब



(a) (b)

आकृति 6.23

$$V(x) = x(3\ 2x)(8 - 2x)$$

$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x, \text{ अत: } \begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

अब $V'(x) = 0$ से $x = \frac{2}{3}$ और $x = 3$ प्राप्त होता है। परन्तु $x \neq 3$ (क्यों?)

इसलिए $x = \frac{2}{3}$

अब $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

इसलिए $x = \frac{2}{3}$ उच्चतम का बिंदु है अर्थात् यदि हम चादर के प्रत्येक किनारे से $\frac{2}{3}$ m भुजा के वर्ग हटा दें और शेष चादर से एक संदूक बनाए तो संदूक का आयतन अधिकतम होगा जो निम्नलिखित है:

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27} \text{m}^3$$

उदाहरण 37 एक निर्माता Rs $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ प्रति इकाई की दर से x इकाइयाँ बेच सकता है। x इकाइयों का उत्पाद मूल्य Rs $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ है। इकाइयों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जो उसे अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए बेचनी चाहिए।

हल मान लीजिए x इकाइयों का विक्रय मूल्य S(x) है और x इकाइयों का उत्पाद मूल्य C(x) है। तब हम पाते हैं

$$S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$$

और $$C(x) = \frac{x}{5} + 500$$

इस प्रकार, लाभ फलन $P(x)$ निम्नांकित द्वारा प्रदत्त है।

$$P(x) = S(x) - C(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

अर्थात् $$P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

या $$P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

अब $P'(x) = 0$ से $x = 240$ प्राप्त होता है और $P''(x) = \frac{-1}{50}$. इसलिए $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$ है।

इस प्रकार $x = 240$ उच्चतम का बिंदु है। अत: निर्माता अधिकतम लाभ अर्जित कर सकता है यदि वह 240 इकाइयाँ बेचता है।

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{\log x}{x}$ द्वारा प्रदत्त फलन $x = e$ पर उच्चतम है।

2. किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 cm/s की दर से घट रहीं है। उस समय जब त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर हैं, उसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से घट रहा है।

3. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

से प्रदत्त फलन f (i) निरंतर वर्धमान (ii) निरंतर ह्रासमान है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ से प्रदत्त फलन

(i) वर्धमान (ii)ह्रासमान है।

5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा है।

6. आयताकार आधार व आयताकार दीवारों की 2 m गहरी और 8 m^3 आयतन की एक बिना ढक्कन की टंकी का निर्माण करना है। यदि टंकी के निर्माण में आधार के लिए Rs $70/m^2$ और दीवारों पर Rs $45/m^2$ व्यय आता है तो निम्नतम खर्च से बनी टंकी की लागत क्या है?

7. एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योग k है, जहाँ k एक अचर है। सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दुगुनी है।

8. किसी आयत के ऊपर बने अर्धवृत्त के आकार वाली खिड़की है। खिड़की का संपूर्ण परिमाप 10 m है। पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

9. त्रिभुज की भुजाओं से a और b दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि कर्ण की न्यूनतम लंबाई $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ है।

10. उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$ द्वारा प्रदत्त फलन f का,

(i) स्थानीय उच्चतम बिंदु है (ii) स्थानीय निम्नतम बिंदु है

(iii) नत परिवर्तन बिंदु है।

11. $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ द्वारा प्रदत्त फलन f का निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ है।

13. मान लीजिए $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलन f है इस प्रकार कि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर f एक वर्धमान फलन है।

14. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु के ऊँचाई की एक तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ है।

19 से 24 तक के प्रश्नों के सही उत्तर चुनिए।

16. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है:

(A) 1 m/h (B) 0.1 m/h

(C) 1.1 m/h (D) 0.5 m/h

सारांश

- यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$) x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है और $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y के निरूपित की दर को निरूपित करता है।
- यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$, तब श्रृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ यदि } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- एक फलन f

(a) अंतराल $[a, b]$ में वर्धमान है यदि

$[a, b]$ में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए

विकल्पत: यदि प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) \geq 0$, है।

(b) अंतराल $[a, b]$ में ह्रासमान है यदि

$[a, b]$ में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए

विकल्पत: यदि प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) \leq 0$ है।

- फलन f के प्रांत में एक बिंदु c जिस पर या तो $f'(c) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु कहलाता है।
- **प्रथम अवकलज परीक्षण** मान लीजिए एक विवृत्त अंतराल I पर फलन f परिभाषित है। मान लीजिए I में एक क्रांतिक बिंदु c पर फलन f संतत है तब

(i) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात् c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि

$f'(x) > 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तब c स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है।

(ii) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है अर्थात् c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तब c स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है।

(iii) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ परिवर्तित नहीं होता है तब c न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु। वास्तव में इस प्रकार का बिंदु एक नति परिवर्तन बिंदु है।

- **द्वितीय अवकलज परीक्षण** मान लीजिए एक अंतराल I पर f एक परिभाषित फलन है और $c \in$ I है। मान लीजिए f, c पर लगातार दो बार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तब $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तब $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है। इस स्थिति में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ है।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) = 0$, तब यह परीक्षण असफल रहता है।

इस स्थिति में हम पुनः वापस प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग करते हैं और यह ज्ञात करते हैं कि c उच्चतम, निम्नतम या नति परिवर्तन का बिंदु है।

- निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि है:

चरण 1: अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए अर्थात् x के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जहाँ या तो $f'(x) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है।

चरण 2: अंतराल के अंत्य बिंदु लीजिए।

चरण 3: (चरण 1 व 2 से प्राप्त) सभी बिंदुओं पर f के मानों की गणना कीजिए।

चरण 4: चरण 3 में गणना से प्राप्त f के सभी मानों में से उच्चतम और निम्नतम मानों को लीजिए। यही उच्चतम मान, f का निरपेक्ष उच्चतम मान और निम्नतम मान, f का निरपेक्ष निम्नतम मान होंगे।

परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry.*
Mathematical works do consist of proofs just as
poems do consist of characters
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा IX, X तथा XI में हम कथन, संयुक्त कथन, कथन के निषेधन, विलोम तथा प्रतिधनात्मक स्वरूप और अभिगृहीत, अनुमानित कथन, साध्य तथा निगमनात्मक विवेचन की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं।

यहाँ हम गणितीय साध्यों को सिद्ध (प्रमाणित) करने की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

A.1.2 उपपत्ति क्या है? (What is a Proof?)

किसी गणितीय कथन की उपपत्ति में कथनों का एक अनुक्रम अंतर्विष्ट होता है, जिसके प्रत्येक कथन के औचित्य को किसी परिभाषित पद या किसी अभिगृहीत या किसी ऐसी साध्य द्वारा प्रमाणित करते हैं, जिसे निगमनिक विधि तथा कुछ अपरिभाषित पदों द्वारा केवल स्वीकार्य तार्किक नियमों का प्रयोग करके पूर्व प्रतिपादित किया जा चुका हो।

इस प्रकार प्रत्येक उपपत्ति निगमनिक तर्कों की एक श्रृंखला होती है, जिनमें से प्रत्येक की अपनी परिकल्पनाएँ तथा निष्कर्ष होते हैं। अधिकतर हम किसी साध्य को उसमें दिए हुए तथ्यों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा सिद्ध करते हैं। परंतु कभी-कभी साध्य को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा उसके समतुल्य साध्य को सिद्ध करना आसान होता है। इस प्रकार किसी साध्य को सिद्ध करने की दो विधियाँ प्रदर्शित होती हैं, नामत: प्रत्यक्ष उपपत्ति अथवा अप्रत्यक्ष उपपत्ति तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक विधि में तीन भिन्न-भिन्न तरीके होते हैं, जिनकी चर्चा नीचे की गई है।

प्रत्यक्ष उपपत्ति यह साध्य की वह उपपत्ति है, जिसे हम सीधे रुप में प्रदत्त तथ्यों से प्रारंभ कर साध्य की उपपत्ति स्थापित करते हैं।

(i) **सीधा-सीधा उपगमन (Approach)** यह तर्कों की एक शृंखला है, जो प्रदत्त अथवा कल्पित तथ्यों से सीधे प्रारंभ करके, अभिगृहीतों, परिभाषित पदों तथा पूर्व प्रमाणित साध्यों की सहायता से तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा, सिद्ध किए जाने वाले निष्कर्ष को प्रमाणित करती है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ तो $x = 3$ या $x = 2$ है।

हल $x^2 - 5x + 6 = 0$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (एक व्यंजक को तुल्य व्यंजक से बदलने पर)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$ (पूर्वप्रमाणित साध्य $ab = 0$ तब $a = 0$ या $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ या $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से उसकी प्रकृति परिवर्तित नहीं होती है।)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ या $x + 0 = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक(Identity) गुण के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक गुण के प्रयोग द्वारा।)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ या $x = 2$

यहाँ p प्रदत्त कथन "$x^2 - 5x + 6 = 0$" है और q निष्कर्ष कथन "$x = 3$ या $x = 2$" है।

कथन p के व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ को, इसके तुल्य एक अन्य व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ से प्रतिस्थापित कर के हम एक व्यंजक r: "$(x - 3)(x - 2) = 0$" प्राप्त करते हैं

यहाँ दो प्रश्न उठते हैं:

(i) व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ किस प्रकार व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ के समान (तुल्य) है ?

(ii) किसी व्यंजक को उसके समान एक अन्य व्यंजक से हम कैसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं ? इनमें से प्रथम को हम पिछली कक्षाओं में गुणनखंड द्वारा सिद्ध कर चुके हैं अर्थात्

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

द्वितीय प्रश्न तर्क के वैध रूप (तर्क के नियमों) द्वारा संभव होता है।

इसके उपरांत r पूर्वकथन (Premise) या प्रदत्त कथन हो जाता है, जिससे कथन s: "$x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$" प्राप्त होता है। प्रत्येक चरण (steps) का औचित्य कोष्ठक (brackets) में दिया है।

यह प्रक्रिया निरंतर तब तक चलती रहती है जब तक हम अंतिम निष्कर्ष पर नहीं पहुँच जाते हैं।

तर्क की प्रतीकात्मक समतुल्यता निगमन द्वारा यह प्रमाणित करने में है कि $p \Rightarrow q$ सत्य है।

p से प्रारंभ करके निगमन द्वारा $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ को प्रमाणित कीजिए। अत: "$p \Rightarrow q$" सत्य है।

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए की फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ जो $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी (one-one) फलन है

उपपत्ति ध्यान दीजिए कि फलन f एकैकी होगा यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(एकैकी फलन की परिभाषा)

अब मान लीजिए कि $f(x_1) = f(x_2)$ अर्थात् $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (वास्तविक संख्याओं में योज्य तत्समक का गुण)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से विभाजित करने से)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

अतः फलन एकैकी है।

(ii) गणितीय आगमन

गणितीय आगमन, साध्यों को सिद्ध करने की एक ऐसी विधि है, जिसका स्वरूप निगमनिक होता है। इस विधि में उपपत्ति पूर्णरूपेण निम्नलिखित अभिगृहीत पर आधारित होती हैं।

N के एक प्रदत्त उपसमुच्चय S में, यदि

(i) प्राकृत संख्या $1 \in S$ तथा

(ii) प्राकृत संख्या $k + 1 \in S$ जब कभी $k \in S$, तो $S = \mathbf{N}$

गणितीय आगमन का सिद्धांत यह है कि यदि एक कथन "S(n), $n = 1$ के लिए सत्य है" (अथवा किसी अन्य प्रारंभिक संख्या j के लिए सत्य है) और यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य होने में यह अंतर्निहित है कि वह $n = k + 1$ के लिए अनिवार्यतः सत्य है (जब कभी धन पूर्णांक $k \geq j$), तो प्रदत्त कथन किसी भी धन पूर्णांक n, जहाँ $n \geq j$ के लिए सत्य होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हल मान लिया कि $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

अतः P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix}$$

तो हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ सत्य है}$$

पुनः $$A^{k+1} = A^k \,.\, A$$

चूँकि P(k) सत्य है, इसलिए

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta\cos\theta - \sin k\,\theta\sin\theta & \cos k\,\theta\sin\theta + \sin k\,\theta\cos\theta \\ -\sin k\,\theta\cos\theta - \cos k\,\theta\sin\theta & -\sin k\,\theta\sin\theta + \cos k\,\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(आव्यूह गुणन द्वारा)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

अतः P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अतएव P(n), n के सभी मानों (धन पूर्णांक) के लिए सत्य है।

(iii) विभिन्न स्थितियों में विखंडन द्वारा अथवा निःशेषण द्वारा उपपत्ति

कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने की यह विधि केवल तभी संभव है, जब p को अनेक कथनों r, s, t (मान लिया) में विखंडित किया जा सकता हो जैसा कि $p = r \vee s \vee t$ (जहाँ "$\vee$" प्रतीक है "या" के लिए)

यदि सप्रतिबंध कथनों $r \Rightarrow q;$

$s \Rightarrow q;$

तथा $t \Rightarrow q$

को प्रमाणित किया जाए, तो $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, सिद्ध हो जाता है और इस प्रकार $p \Rightarrow q$ प्रमाणित होता है।

इस विधि में परिकल्पना की प्रत्येक संभव दशा को जाँचा जाता है। यह विधि व्यावहारिक रूप से केवल तभी सुविधाजनक है जब विखण्डन द्वारा प्राप्त कथनों की संख्या कम हो।

उदाहरण 4 किसी त्रिभुज ABC, में सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$

हल मान लीजिए कि p कथन "ABC एक त्रिभुज है " तथा q कथन

"$a = b \cos C + c \cos B$" है

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। शीर्ष A से BC (आवश्यकतानुसार बढ़ाई गई) पर लंब AD खींचिए।

हमें ज्ञात है कि एक त्रिभुज या तो न्यूनकोण त्रिभुज या अधिककोण त्रिभुज या समकोण त्रिभुज होता है, इसलिए हम p को r, s तथा t में विखण्डित कर सकते हैं, जहाँ

r : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

s : ABC एक अधिककोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ अधिककोण है।

t : ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ समकोण है।

अत: हम साध्य को उपर्युक्त तीनों संभावनाओं के लिए अलग-अलग सिद्ध करते हैं।

दशा (i) जब $\angle A$, $\angle B$, तथा $\angle C$ तीनों ही न्यूनकोण हैं (आकृति A1.1)

समकोण त्रिभुज ADB, द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

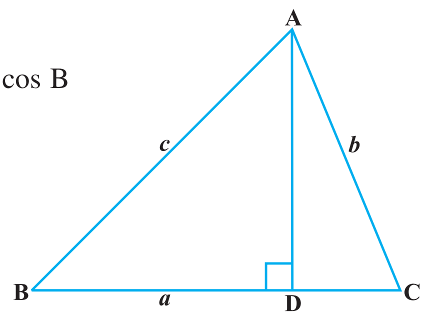
अर्थात् $BD = AB \cos B = c \cos B$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

अर्थात् $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$



आकृति A1.1

अब $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$ ... (1)

दशा (ii) जब $\angle C$ अधिककोण है (आकृति A1.2)

समकोण त्रिभुज ADB द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $BD = AB \cos B$

$$= c \cos B$$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

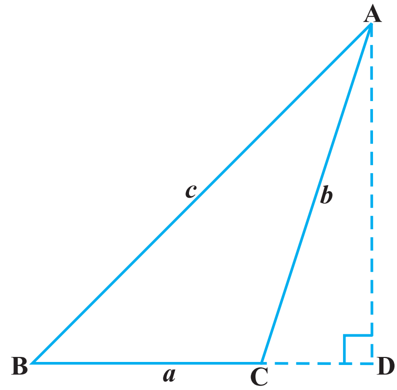
$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$$= \cos (180 - C)$$

$$= -\cos C$$

अर्थात् $CD = -AC \cos C$

$$= -b \cos C$$



आकृति A1.2

अब $a = BC = BD - CD$

अर्थात् $a = c \cos B - (-b \cos C)$

$$a = c \cos B + b \cos C \qquad \ldots (2)$$

दशा (iii) जब $\angle C$ समकोण है (आकृति A1.3)

त्रिभुज ACB, द्वारा

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

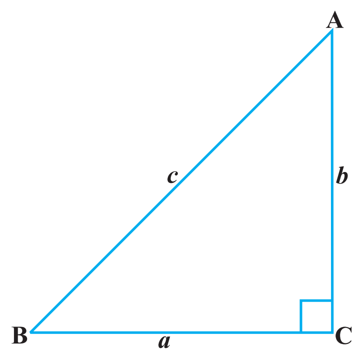
अर्थात् $BC = AB \cos B$

तथा $a = c \cos B,$

$$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$$

अत: हम लिख सकते हैं $a = 0 + c \cos B$

$$= b \cos C + c \cos B \qquad \ldots (3)$$



आकृति A1.3

समीकरण (1), (2) तथा (3) से हम पाते हैं, कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a = b \cos C + c \cos B$$

दशा (i) से $r \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

दशा (ii) से $s \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

तथा **दशा (iii)** से $t \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

अत: $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ प्रमाणित है अर्थात् $p \Rightarrow q$ प्रमाणित है,

अप्रत्यक्ष उपपत्ति: दिए गए साध्य को सीधे प्रमाणित करने के एवज में, हम उसके समतुल्य किसी साध्य को सिद्ध करके, प्रदत्त साध्य को प्रमाणित करते हैं

(i) विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (*Reductio Ad Absurdum*):
यहाँ हम इस मान्यता से प्रारंभ करते हैं कि परिकल्पना सत्य है तथा निष्कर्ष असत्य है। तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि एक ज्ञात सत्य कथन, असत्य है, जो एक विरोधोक्ति है। अत: प्रदत्त कथन सत्य है इस विधि को एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 5 सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित (Infinite) होता है।

हल मान लीजिए कि समस्त अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) का समुच्चय P है जो अपरिमित है। हम इस कथन के निषेध (Negation) को, अर्थात समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित नहीं है, सत्य मान लेते हैं, अर्थात् समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है। इसलिए हम समस्त अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं। मान लीजिए कि $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ समस्त अभाज्य संख्याओं की सूची है। अब मान लीजिए

$$N = (P_1 \, P_2 \, P_3 \ldots P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

स्पष्ट है कि N अभाज्य संख्याओं की सूची में नहीं है, क्योंकि यह सूची की किसी भी संख्या से अधिक है।

N या तो अभाज्य संख्या है या संयुक्त संख्या है।

यदि N अभाज्य संख्या है तो (1) से स्पष्ट होता है कि एक ऐसी अभाज्य संख्या का अस्तित्व है, जो सूची में नहीं है।

दूसरी ओर, यदि N एक संयुक्त संख्या है, तो इसका कम से कम एक अभाज्य भाजक (Divisor) होना चाहिए। परंतु सूची की कोई भी संख्या N को विभाजित (पूर्णरूप से) नहीं कर सकती है, क्योंकि उनमें से किसी के द्वारा N को विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 बचता है। अत: N का अभाज्य भाजक सूची के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या है।

किंतु यह, इस कथन का कि हमने सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना ली है, विरोधोक्ति है।

इस प्रकार हमारी पूर्वधारणा कि सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है, असत्य है।

अत: सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित होता है।

टिप्पणी (ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उपपत्ति में विभिन्न दशाओं में विखण्डन द्वारा उपपत्ति की विधि का उपयोग भी है)

(ii) प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक (contrapositive) कथन के प्रयोग द्वारा उपपत्ति:
यहाँ सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के स्थान पर हम उसके समतुल्य कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करते हैं। (विद्यार्थी समतुल्यता को सत्यापित कर सकते हैं)।

किसी दिए हुए सप्रतिबंध कथन के निष्कर्ष तथा परिकल्पना का विनिमय करके उनमें से प्रत्येक का निषेधन करने से प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन बनता है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैकी फलन है।

हल फलन एकैकी होता है, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

इसका प्रयोग करके हमें प्रमाणित करना है कि "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$" यह $p \Rightarrow q$, के रूप का है, जहाँ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ कथन p है तथा $x_1 = x_2$ कथन q है। इस बात को हम उदाहरण 2 में "प्रत्यक्ष विधि" द्वारा सिद्ध कर चुके हैं।

हम इसे प्रदत्त कथन के प्रतिधनात्मक कथन के प्रयोग द्वारा भी प्रमाणित कर सकते हैं। दिए गए कथन का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ है, अर्थात् "यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तो $x_1 = x_2$" का प्रतिधनात्मक है "यदि $x_1 \neq x_2$ तो $f(x_1) \neq f(x_2)$"

अब $$x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 \neq 2x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$

$\Rightarrow$ $$f(x_1) \neq f(x_2).$$

क्योंकि "$\sim q \Rightarrow \sim p$", और "$p \Rightarrow q$" समतुल्य है, इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण है।

उदाहरण 7 प्रमाणित कीजिए कि "यदि आव्यूह A, Invertible है, तो A, Non-singular है"

हल उपर्युक्त कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखने पर $p \Rightarrow q$ जहाँ p कथन "आव्यूह A, invertible है" तथा q कथन "A, non-singular है।"

प्रदत्त कथन को प्रमाणित करने के एवज में हम इसके प्रतिधनात्मक कथन को प्रमाणित करते हैं, अर्थात् यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है, तो आव्यूह A invertible नहीं है।

यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो इसका अर्थ हुआ $|A| = 0$ है।

अब $$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $|A| = 0$

अत: A, Invertible नहीं है।

इस प्रकार हमने यह प्रमाणित कर दिया कि यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो A, invertible नहीं है। अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अत: यदि एक आव्यूह A invertible है, तो A non-singular है।

(iii) प्रत्युदाहरण (counter example) द्वारा उपपत्ति:

गणित के इतिहास में ऐसे अवसर भी आते हैं, जब किसी परिकल्पित व्यापकीकरण की वैध उपपत्ति ज्ञात करने के सभी प्रयास असफल हो जाते हैं और व्यापकीकरण के सत्यमान की अनिश्चितता अनिर्णीत बनी रहती है।

ऐसी स्थिति में यह लाभप्रद है कि, कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए, हम एक उदाहरण ढूँढ़ सकें। किसी कथन को अमान्य करने वाला उदाहरण प्रत्युदाहरण कहलाता है।

क्योंकि साध्य $p \Rightarrow q$ का खंडन, साध्य $\sim (p \Rightarrow q)$ की केवल मात्र एक उपपत्ति होता है। अतः यह भी उपपत्ति की एक विधि है।

उदाहरण 8 कथन: प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $(2^{2^n} + 1)$ एक अभाज्य संख्या है।

यह कथन निम्नलिखित प्रेक्षणों के आधार पर एक समय सत्य समझा गया था:

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ जो कि एक अभाज्य संख्या है।

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ जो कि अभाज्य संख्या है।

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ जो कि एक अभाज्य है।

यद्यपि, प्रथम दृष्टि में यह व्यापकीकरण सही प्रतीत होता है। अंततोगत्वा यह प्रतिपादित किया गया कि $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ एक अभाज्य संख्या नहीं है क्योंकि $4294967297 = 641 \times 6700417$ है। जो दो संख्याओं का गुणनफल है (1 तथा स्वंय के अतिरिक्त) इस प्रकार यह व्यापकीकरण कि "प्रत्येक n के लिए $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है $\forall n \in \mathbf{N}^+$" असत्य है।

मात्र केवल यह एक उदाहरण कि $2^{2^5} + 1$ अभाज्य नहीं है, का उदाहरण व्यापकीकरण को खंडित करने के लिए पर्याप्त है।

अतः हमने सिद्ध कर दिया कि कथन "प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है" सत्य नहीं है।

उदाहरण 9 कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है।" पर विचार कीजिए।

उपपत्ति: हम निम्नलिखित फलनों पर विचार करते हैं:

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ये सभी फलन x के सभी मानों के लिए संतत हैं। यदि हम अवकलनीयता पर विचार करें तो ये x के सभी मानों के लिए अवकलनीय हैं। यह हमें इस विश्वास के लिए प्रेरित करता है कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" सत्य है। किंतु यदि हम फलन "$\phi(x) = |x|$" की अवकलनीयता की जाँच करें, जो कि संतत है, तो हम देखते हैं कि यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" असत्य है। फलन "$\phi(x) = |x|$" का केवल यह एक उदाहरण, व्यापकीकरण का खंडन करने के लिए पर्याप्त है। अतः फलन "$\phi(x) = |x|$" को दिए गए कथन अर्थात्, "प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय होता है।" के खंडन का प्रत्युदाहरण कहते हैं।

परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

A.2.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में हम गणितीय निदर्शन को वास्तविक जीवन की समस्याओं के कुछ अंश का गणितीय भाषा में अध्ययन के एक प्रयास के रूप में जान चुके हैं, अर्थात् उपयुक्त प्रतिबंधों का प्रयोग करके किसी भौतिक स्थिति का गणितीय रूपांतरण ही गणितीय निदर्शन है। मोटे तौर पर गणितीय निदर्शन एक प्रक्रिया है, जिसमें हम अपनी रुचि के साधनों या वस्तुओं के व्यवहार का वर्णन करने हेतु निदर्शों (Models) की रचना, विविध प्रकार से शब्दों, आरेखों या रेखाचित्रों, कंप्यूटर प्रोग्रामों, गणितीय सूत्रों आदि के प्रयोग द्वारा करते हैं।

पिछली कक्षाओं में हमने देखा है कि, विविध गणितीय संकल्पनाओं के प्रयोग से संबंधित अधिकांश प्रश्नों के हल के लिए एक प्रकार से गणितीय निदर्शन की आवश्यकता पड़ती है। अत: यह महत्वपूर्ण है कि गणितीय निदर्शन का अध्ययन एक पृथक् विषय के रूप में किया जाना चाहिए।

इस अध्याय (परिशिष्ट) में हम पुन: गणितीय निदर्शन का अध्ययन वास्तविक जीवन की कुछ ऐसी समस्याओं के लिए करेंगे, जिनमें आव्यूह, कलन तथा रैखिक प्रोग्रामन की प्राविधिओं का प्रयोग किया जाता है।

A.2.2 गणितीय निदर्शन क्यों? (Why Mathematical Modelling?)

विद्यार्थियों को अंकगणित, बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा रैखिक प्रोग्रामन आदि के शाब्दिक प्रश्नों को हल करने का ज्ञान है। कभी-कभी हम परिस्थितिजन्य प्रश्नों को भौतिक रूप से उनकी गहराई में गए बिना ही सरल करते हैं। परिस्थितिजन्य प्रश्नों को हल करने के लिए भौतिक रूप से उनकी गहराई में जाने की आवश्यकता पड़ती है, अर्थात् भौतिक नियमों तथा कुछ प्रतीकों के प्रयोग की आवश्यकता जिससे प्राप्त गणितीय परिणामों का संगत प्रायोगिक मानों से तुलना की जा सके। अनेक प्रस्तुत प्रश्नों को सरल करने के लिए हमें एक कौशल की आवश्यकता पड़ती है जिसे **गणितीय निदर्शन** कहते हैं। आइए हम निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करें:

(i) किसी नदी की चौड़ाई ज्ञात करना (विशेष रूप से जब नदी को पार करना कठिन हो)।

(ii) किसी गोले के फेंकने हेतु महत्तम कोण ज्ञात करना (गोला फेंकने वाले की ऊँचाई, माध्यम का प्रतिरोध, गुरूत्वाकर्षण g आदि प्राचलों पर विचार करते हुए)।

(iii) किसी मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना (विशेषरूप से जब मीनार का शीर्ष अगम्य हो)।

(iv) सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करना।

(v) ज्ञात करना कि हृदय रोगियों को लिफ्ट के प्रयोग का निषेध क्यों है (बिना मानव शरीर क्रिया विज्ञान जाने)।

(vi) पृथ्वी का द्रव्यमान ज्ञात करना।

(vii) खड़ी फसल से भारत में दालों की पैदावार का अनुमान लगाना (जब किसी को फसल के काटने की अनुमति नहीं है)।

(viii) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन ज्ञात करना (व्यक्ति का रक्त निकालने की अनुमति नहीं है)।

(ix) सन् 2009 ई. में भारत की जनसंख्या का अनुमान लगाना (जब कि सन् 2009 ई. तक प्रतीक्षा करने की अनुमति नहीं है)।

उपर्युक्त सभी समस्याओं को गणितीय निदर्शन के प्रयोग द्वारा सरल किया जा सकता है और वास्तव में सरल किया जा चुका है। वस्तुतः इनमें से कुछ समस्याओं को सरल करने की विधियों का अध्ययन आप इसी पाठ्यपुस्तक में करेंगे। तथापि यह शिक्षाप्रद होगा यदि आप इनको स्वयं सरल करने का प्रयास करें वह भी बिना गणित के प्रयोग किए। तब आप गणित की क्षमता तथा गणितीय निदर्शन की आवश्यकता के महत्त्व को समझ सकेंगे।

A.2.3 गणितीय निदर्शन के सिद्धांत (Principles of Mathematical Modelling)

गणितीय निदर्शन एक सिद्धांतयुक्त क्रिया है अतः इससे संबंधित कुछ सिद्धांत हैं। इन सिद्धांतों का स्वरूप लगभग दार्शनिक हैं। गणितीय निदर्शन के कुछ मूल सिद्धांतों को अनुदेशात्मक रूप में नीचे सूचीबद्ध किया गया है:

(i) निदर्श की आवश्यकता को पहचानिए (हम मॉडल क्यों खोज रहे हैं)।

(ii) मॉडल के लिए प्राचलों/चरों को सूचीबद्ध कीजिए (हम क्या ज्ञात करना चाहते हैं)।

(iii) उपलब्ध प्रासंगिक आँकड़ों को पहचानिए (क्या दिया हुआ है)।

(iv) प्रयोग योग्य परिस्थितियों को पहचानिए (पूर्वधारणा, कल्पना)।

(v) नियंत्रक भौतिक नियमों को पहचानिए।

(vi) पहचानिए:

  (a) प्रयुक्त होने वाले समीकरण।

  (b) की जाने वाली गणना।

  (c) परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाला हल।

(vii) उन परीक्षणों को पहचानिए जिनसे निम्नलिखित जाँच की जा सके:

(a) मॉडल तथा उससे संबंधित नियमों एवं कल्पनाओं का संगत होना।

(b) मॉडल की उपयोगिता।

(viii) उन प्राचलों को पहचानिए जो मॉडल को सुधार सकें।

निदर्शन के उपर्युक्त सिद्धांतों के आधार पर हमें गणितीय निदर्शन के निम्नलिखित चरण प्राप्त होते हैं:

चरण 1: भौतिक स्थिति को पहचानिए।

चरण 2: प्राचलों / चरों के चयन और ज्ञात भौतिक नियमों तथा प्रतीकों के प्रयोग द्वारा भौतिक स्थिति को गणितीय मॉडल में परिवर्तित कीजिए।

चरण 3: गणितीय प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।

चरण 4: प्राप्त परिणाम की मूल प्रश्न (समस्या) के संदर्भ में व्याख्या कीजिए और उसकी (परिणाम) प्रेक्षणों अथवा प्रयोगों से तुलना कीजिए।

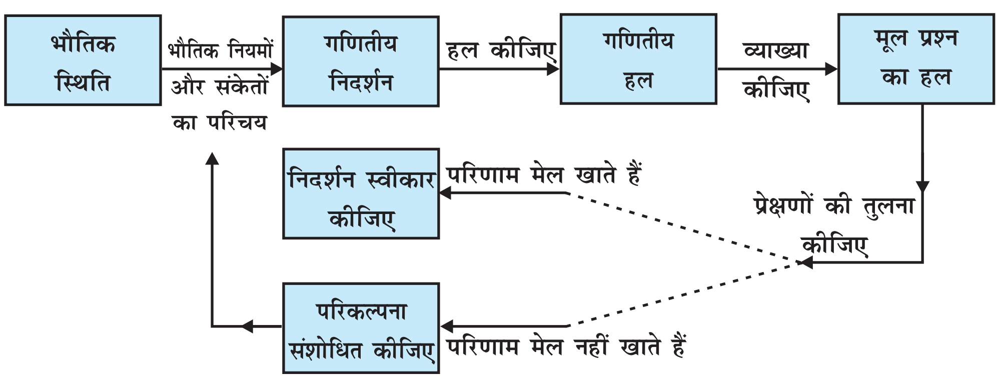
चरण 5: यदि परिणाम लगभग मेल खाते हैं, तो मॉडल को स्वीकार कीजिए अन्यथा भौतिक स्थिति की परिकल्पना / कल्पना को संशोधित कीजिए और चरण 2 पर जाइए।

उपर्युक्त चरणों को नीचे दर्शाए आरेख में देखा जा सकता है:

उदाहरण 1 गणितीय निर्दशन के प्रयोग द्वारा एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चरण 1 "एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना" प्रदत्त भौतिक स्थिति है।

चरण 2 मान लीजिए कि AB दी गई मीनार है (आकृति A.2.2)। मान लीजिए PQ मीनार की ऊँचाई नापने वाला एक प्रेक्षक है, जिसकी आँख बिंदु P पर है। मान लीजिए कि PQ = h तथा मीनार की ऊँचाई H है। पुन: मान लीजिए कि प्रेक्षक की आँख से मीनार के शिखर (शीर्ष) का उन्नयन-कोण α है तथा l = QB = PC



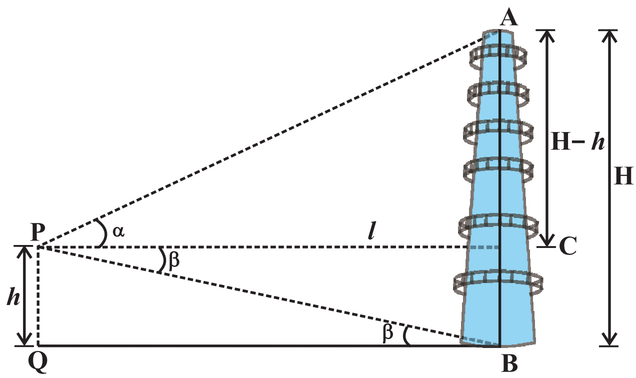
आकृति A.2.1

अब
$$\tan\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

या
$$H = h + l\tan\alpha \qquad \ldots (1)$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि प्राचल h, l तथा α के मान प्रेक्षक को ज्ञात हैं अतः परिणाम (1) से समस्या का हल प्राप्त होता है।

चरण 4 उस दशा में जब मीनार का आधार अगम्य हो, अर्थात् जब प्रेक्षक को l का मान ज्ञात नहीं हो, तब मान लीजिए कि मीनार के आधार B का बिंदु P से अवनमन-कोण β है। अतः Δ PQB से हमें



आकृति A.2.2

प्राप्त होता है कि

$$\tan\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ या } l = h\cot\beta$$

चरण 5 इस स्थिति में इस चरण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि h, l, α तथा β प्राचलों के सही मान ज्ञात हैं।

उदाहरण 2 मान लीजिए कि एक व्यावसायिक फर्म तीन प्रकार के उत्पाद P_1, P_2 और P_3 का उत्पादन करती है, जिनमें तीन प्रकार के कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 का प्रयोग होता है। मान लीजिए कि फर्म से दो ग्राहक F_1 और F_2 खरीद की माँग करते हैं। यह मानते हुए कि फर्म के पास R_1, R_2 तथा R_3 की सीमित मात्रा है, एक मॉडल बनाइए, जो माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1, R_2 और R_3 की मात्राओं को सुनिश्चित करे।

हल चरण 1 इस समस्या में भौतिक स्थिति की पहचान भलीभाँति है।

चरण 2 मान लीजिए कि A एक आव्यूह है, जो ग्राहकों F_1 तथा F_2 की आवश्यकता को निरूपित करता है। तब A का रूप ऐसा होगा,

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{matrix}$$

मान लीजिए कि B एक आव्यूह है, जो उत्पाद P_1, P_2 तथा P_3 की प्रत्येक इकाई के उत्पादन हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की आवश्यक मात्राओं को निरूपित करता है। तब B नीचे दिए गए प्रकार का होगा,

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{matrix}$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि A तथा B आव्यूहों का गुणनफल (जो इस स्थिति में सुपरिभाषित है) निम्नलिखित आव्यूह द्वारा प्राप्त होता है।

$$AB = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{matrix}$$

जिससे वास्तव में ग्राहकों F_1 तथा F_2 के फरमाइशों को पूरा करने हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 की वांछित मात्राएँ ज्ञात होती हैं।

उदाहरण 3 उदाहरण 2 के मॉडल की व्याख्या कीजिए, जब कि

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

तथा कच्चे माल की उपलब्ध मात्राएँ R_1 की 330 इकाईयाँ, R_2 की 455 इकाईयाँ और R_3 की 140 इकाईयाँ हैं।

हल नोट कीजिए कि

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

यह स्पष्टतया दर्शाता है कि F_1 और F_2 की माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1 की 335 इकाई,

R_2 की 467 इकाई तथा R_3 की 147 इकाई की आवश्यकता है जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं से अधिक है। क्योंकि तीनों उत्पादों की प्रत्येक इकाई के निर्माण हेतु कच्चे माल के अपेक्षित मात्राएँ निश्चित हैं, इसलिए हम या तो कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं के बढ़ाने की माँग कर सकते हैं अथवा हम ग्राहकों से उनकी माँगों को कम करने का निवेदन कर सकते हैं।

टिप्पणी यदि हम उदाहरण 3 में A को A_1 से बदल दें, जहाँ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

अर्थात्, यदि ग्राहक लोग अपनी माँगों को कम करने के लिए मान जाते हैं, तो

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

यहाँ R_1 की 311, R_2 की 436 तथा R_3 की 138 इकाइयाँ आपेक्षित हैं जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं अर्थात् R_1 की 330, R_2 की 455 तथा R_3 की 140 इकाइयों से कम हैं।

टिप्पणी हम A को पुन: इस प्रकार संशोधित कर सकते हैं जिससे उपलब्ध कच्चे माल का पूर्णतया उपयोग हो जाए।

इस प्रकार यदि ग्राहकों की माँग को पूरा करने के लिए A_1 के द्वारा क्रय-आदेश दिए जाते हैं, तो फर्म दोनों ग्राहकों के क्रय-आदेशों को सरलता से पूरा कर सकता है।

पूछताछ प्रदत्त B तथा उपलब्ध कच्चे माल की निर्धारित मात्राओं के लिए क्या हम, फर्म के मालिक की सहायतार्थ, एक ऐसा गणितीय मॉडल बना सकते है, जिससे वह ग्राहकों से अनुरोध कर सके कि वे अपनी माँगों को इस प्रकार संशोधित करें कि उपलब्ध कच्चा माल पूर्णतया उपयोग में आ जाए।
इस पूछताछ का उत्तर निम्नलिखित उदाहरण में दिया गया है:

उदाहरण 4 मान लिजिए कि P_1, P_2, P_3 तथा R_1, R_2, R_3 उसी प्रकार है जैसा उदाहरण 2 में दिया है। मान लीजिए कि फर्म के पास R_1 की 330, R_2 की 455 और R_3 की 140 इकाइयाँ उपलब्ध हैं और मान लीजिए कि तीनों उत्पाद की प्रत्येक इकाई के निर्माण के लिए कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की मात्राएँ निम्नलिखित आव्यूह से प्राप्त होतीं हैं

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

प्रत्येक उत्पाद की कितनी इकाइयाँ बनाइ जाएँ कि उपलब्ध कच्चे माल का उपयोग पूर्णतया हो जाए?

हल चरण 1 स्थिति सरलता से पहचान योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि फर्म P_1 की x इकाइयों , P_2 की y तथा P_3 की z इकाइयों का उत्पादन करती है। क्योंकि उत्पाद P_1 के लिए R_1 की 3, P_2 के लिए R_1 की 7 तथा P_3 के लिए R_1 की 5 इकाइयों की आवश्यकता पड़ती है (आव्यूह B देखिए) और R_1 की कुल 330 इकाइयाँ उपलब्ध हैं, अतः

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (कच्चे माल } R_1 \text{ के लिए)}$$

इसी प्रकार
$$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (कच्चे माल } R_2 \text{ के लिए)}$$

और
$$3y + 7z = 140 \text{ (कच्चे माल } R_3 \text{ के लिए)}$$

इस (उपर्युक्त) समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

चरण 3 प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया द्वारा, हमें प्राप्त होता है;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

इससे $x = 20, y = 35$ तथा $z = 5$ मिलता है। अतएव फर्म P_1 की 20, P_2 की 35 तथा P_3 की 5 इकाइयाँ उत्पन्न कर सकती है।

टिप्पणी कोई भी देख सकता है कि यदि निर्माता ग्राहकों F_1 और F_2 की माँगों (जैसा उदाहरण 3 में है) पर विचार किए बिना ही केवल उपलब्ध कच्चे माल के अनुसार उत्पादन करने का निर्णय लेता है, तो वह उनकी माँगों को पूरा नहीं कर सकता है, क्योंकि F_1 ने P_3 की 6 इकाइयाँ माँगी है जब कि निर्माता उसकी केवल 5 इकाइयाँ ही बना सकता है।

उदाहरण 5 एक दवा-निर्माता M_1 और M_2 दवाइयों की उत्पादन-योजना बनाता है। M_1 की 20,000 तथा M_2 की 40,000 बोतलों के लिए दवा बनाने हेतु यथेष्ट कच्चा-माल उपलब्ध है, किंतु उसके पास केवल 45,000 बोतलें हैं, जिनमें वह दोनों में से कोई भी दवा भर सकता है। M_1 की 1,000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 3 घंटे और M_2 की 1000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 1 घंटा लगते हैं तथा इस प्रक्रिया के लिए केवल 66 घंटे उपलब्ध हैं। M_1 की प्रत्येक बोतल पर Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर Rs 7 लाभ होता है। दवा-निर्माता, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, अपनी उत्पादन-योजना किस प्रकार बनाए?

हल चरण 1 प्रदत्त परिकल्पना के अंतर्गत, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, दवाओं M_1 तथा M_2 की बोतलों की संख्या ज्ञात करना।

चरण 2 मान लीजिए कि दवा M_1 की x और दवा M_2 की y बोतलें हैं। क्योंकि M_1 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 7 होता है, अतः उद्देश्य-फलन (objective

function), जिसे अधिकतम करना है नीचे लिखे समीकरण से दिया गया है।

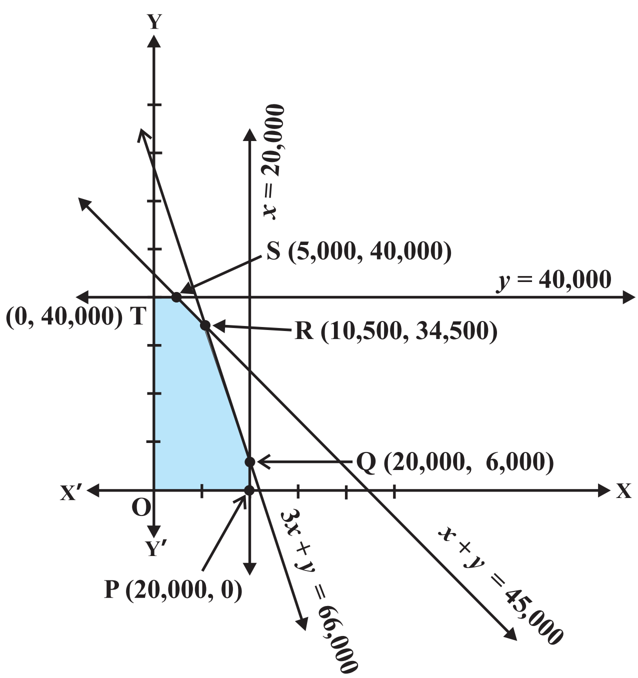
$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

इस उद्देश्य-फलन का निम्नलिखित प्रतिबंधों (व्यवरोधों) के अंतर्गत अधिकतम करना है (रैखिक प्रोग्रामन के अध्याय 12 पर ध्यान दीजिए)।

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

चरण 3 प्रदत्त व्यवरोधों (constraints) (1) के अंतर्गत छायांकित क्षेत्र OPQRST सुसंगत-क्षेत्र है (आकृति A.2.3) बिंदुओं O, P, Q, R, S तथा T कोंनीय के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) तथा (0, 40000) हैं।

नोट कीजिए कि



आकृति A.2.3

$$P\ (0, 0) \text{ पर } Z = 0$$

$$P\ (20000, 0) \text{ पर } Z = 8 \times 20000 = 160000$$

$$Q\ (20000, 6000) \text{ पर } Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$$

$$R\ (10500, 34500) \text{ पर } Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$$

$$S = (5000, 40000) \text{ पर } Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$$

$$T = (0, 40000) \text{ पर } Z = 7 \times 40000 = 280000$$

ध्यान दीजिए कि $x = 10500$ और $y = 34500$ पर महत्तम लाभ अर्जित होता है, जो कि Rs 325500 है। अत: निर्माता (उत्पादक) को Rs 325500 का महत्तम लाभ अर्जित करने के लिए M_1 की 10500 तथा M_2 की 34500 बोतलें उत्पन्न करनी चाहिए।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि एक कंपनी कोई नया उत्पाद बनाना चाहती है, जिस पर कुछ लागत (स्थिर और चर लागत) आती है और मान लीजिए कि कंपनी उस उत्पाद को एक स्थिर मूल्य पर विक्रय करने की योजना बनाती है। इस स्थिति में लाभ-हानि के परीक्षण हेतु एक गणितीय मॉडल बनाइए।

हल चरण 1 यहाँ स्थिति स्पष्टतया पहचान योग्य है।

चरण 2 **सूत्रण** से हमें ज्ञात है की लागत दो प्रकार की होती है, स्थिर तथा चर। स्थिर लागत उत्पाद की संख्या से स्वतंत्र होती है (जैसे किराया, शुल्क आदि), जब कि चर लागत उत्पाद की संख्या बढ़ने से बढ़ती है (जैसे सामग्री, पैकिंग इत्यादि)। प्रारंभ में हम मान लेते हैं कि चर लागत उत्पाद की संख्या की अनुक्रमानुपाती है - इससे हमारा मॉडल सरल हो जाता है। कंपनी को कुछ धन राशि विक्रय द्वारा प्राप्त होती है, और वह (कंपनी) यह सुनिश्चित करना चाहती है कि यह प्राप्त धन महत्तम है। सुविधा के लिए, हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक उत्पादित इकाई तत्काल बेच दी जाती है।

गणितीय मॉडल

मान लीजिए कि उत्पादित तथा विक्रय की गई इकाइयों की संख्या x है,

C = उत्पादन की कुल लागत है (रुपयों में)

I = विक्रय से होने वाली कुल आय है (रुपयों में)

P = कुल लाभ है (रुपयों में)

हमारी I उपर्युक्त मान्यता (assumption) के अनुसार C दो भागों से मिल कर बनता है:

स्थिर लागत = a (रुपयों में),

चर लागत = b (रुपए प्रति इकाई).

अतएव $\quad C = a + bx \quad$ ... (1)

साथ ही आय I विक्रय मूल्य s (रुपए प्रति इकाई) पर निर्भर है,

अत: $$I = sx \quad \dots (2)$$

लाभ P आय और लागत के अंतर के बराबर होता है, इस प्रकार

$$\begin{aligned} P &= I - C \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\, x - a \quad \dots (3) \end{aligned}$$

इस प्रकार अब हमें चर राशिओं x, C, I, P, a, b, तथा s के बीच (1), (2) तथा (3) में दर्शाए पारस्परिक संबंधों का एक गणितीय मॉडल प्राप्त होता है। इन चर राशिओं का वर्गीकरण इस प्रकार है,

स्वतंत्र x

आश्रित (परतंत्र) C, I, P

प्राचल a, b, s

उत्पादक को $x, a, b, s,$ की जानकारी है और वह P ज्ञात कर सकता है।

चरण 3 संबंध (3) द्वारा हम देखते हैं कि सम विच्छेदन बिंदु (न कोई लाभ और न कोई हानि) के लिए P = 0, अर्थात्, $x = \dfrac{a}{s-b}$ इकाइयाँ।

चरण 4 तथा 5 सम विच्छेदन बिंदु के विचार से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि कंपनी कुछ इकाइयाँ ही उत्पादित करती है, अर्थात् $x = \dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से कम हो तो उसे हानि होगी और यदि वह अधिक इकाइयाँ उत्पादित करती है, अर्थात् $\dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से अधिक तो उसे लाभ होगा। इसके अतिरिक्त, यदि सम विच्छेदन बिंदु अवास्तविक सिद्ध होता है, तब कोई अन्य मॉडल प्रयुक्त किया जा सकता है अथवा धन प्रवाह से संबंधित अभिधारणाओं में संशोधन किया जा सकता है।

टिप्पणी संबंध (3) से, हमें यह भी मिलता है कि,

$$\frac{dP}{dx} = s - b$$

अर्थात्, x के सापेक्ष P के परिवर्तन की दर, राशि $s - b$ पर निर्भर करती है जो कि उत्पाद के विक्रय मूल्य तथा उसके चर लागत के अंतर के बराबर है। अत: लाभ अर्जित करने के लिए इस राशि को धनात्मक होना चाहिए और प्रचुर मात्रा में लाभ अर्जित करने के लिए हमें बहुत अधिक मात्रा उत्पादित करनी चाहिए साथ ही साथ चर लागत को कम करने का प्रयास भी करना चाहिए।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि एक टैंक में 1000 लिटर लवण-जल है जिसमें प्रति लिटर 250 g लवण है। 200 g/L लवण वाला लवण-जल, 25 L/min की दर से टैंक में आ रहा है तथा इस प्रकार प्राप्त मिश्रण समान दर से टैंक से बाहर निकल रहा है। किसी क्षण t पर टैंक में लवण की मात्रा क्या है?

हल चरण 1 यहाँ स्थिति सरलता से पहचान करने के योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि $y = y(t)$ द्वारा अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने के बाद, किसी समय t (मिनट में) पर, टैंक में उपस्थित लवण की मात्रा (किलो ग्राम में) सूचित (प्रकट) होती है। जब $t = 0$, अर्थात् अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने से पूर्व $y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$

ध्यान दीजिए कि y में परिवर्तन, मिश्रण में अंतर्वाह-बहिर्वाह के कारण होता है

अब टैंक में लवण-जल का अंतर्वाह, 5 kg/min (क्योंकि $25 \times 200 \text{ g} = 5 \text{ kg}$) की दर से लवण लाता है तथा लवण-जल का बहिर्वाह $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min (क्योंकि t समय पर टैंक में लवण की मात्रा $\frac{y}{1000}$ kg है)

अत: t के सापेक्ष टैंक में लवण की मात्रा में परिवर्तन की दर निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होती है,

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(क्यों?)}$$

या
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \ldots (1)$$

यह परिणाम प्रदत्त समस्या का एक गणितीय मॉडल देता है।

चरण 3 परिणाम (1) एक रैखिक समीकरण है, जिसे आसानी से सरल किया जा सकता है। समीकरण (1) का हल नीचे दिया है

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \quad \text{या} \quad y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (2)$$

जहाँ C समाकलन का अचर है।

ध्यान दीजिए कि ज्ञात है कि जब $t = 0$, $y = 250$. अतएव, $250 = 200 + C$

अथवा
$$C = 50$$

तब समीकरण (2) नीचे लिखित रूप में परिवर्तित हो जाता है,

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (3)$$

या
$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

या $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

अतः $$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \quad \ldots (4)$$

इस प्रकार समीकरण (4) वह समय t देता है, जब टैंक में लवण की मात्रा y kg है।

चरण 4 समीकरण (3) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सदैव $y > 200$ क्योंकि $e^{-\frac{t}{40}}$ का मान सर्वदा धनात्मक रहता है

अतः टैंक में लवण की न्यूनतम मात्रा लगभग 200 kg (किंतु ठीक-ठीक 200 kg नहीं) हो सकती है। इसके अतिरिक्त समीकरण (4) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $t > 0$ यदि और केवल यदि $0 < y - 200 < 50$ अर्थात् यदि और केवल यदि $200 < y < 250$ अंतर्गत टैंक के लवण-जल के अंतर्वाह और बहिर्वाह के प्रारंभ होने के बाद लवण की मात्रा 200 kg और 250 kg के मध्य है।

गणितीय निदर्शन की परिसीमाएँ (Limitations)

अभी तक अनेक गणितीय मॉडल विकसित किए गए हैं और उनका अनुप्रयोग (application) अनेकानेक परिस्थितियों को गहनता से समझने में सफलतापूर्वक किया जा चुका है। कुछ विषय जैसे गणितीय भौतिकी, गणितीय अर्थशास्त्र, संक्रिया विज्ञान (operations research), जीव-गणित (Bio-mathematics) आदि, गणितीय निदर्शन के (लगभग) पर्यायवाची/समानार्थी हैं।

परंतु, आज भी कई परिस्थितियाँ ऐसी है, जिनके मॉडल अभी बनने हैं। जिसके पीछे कारण यह है कि या तो वे परिस्थितियाँ बहुत जटिल हैं अथवा विकसित मॉडल गणितानुसार असाध्य हैं।

शक्तिशाली कंप्यूटरों तथा अति-कंप्यूटरों (Super Computers) के विकास ने, परिस्थितियों की एक बहुत बड़ी संख्या के लिए, गणितानुसार मॉडल बनाने में, हमें सक्षम बना दिया है।

त्वरित (fast) तथा उन्नत कंप्यूटर के कारण यह संभव हो सका है कि हम अधिक यथार्थ मॉडलों की रचना कर सकते हैं जिनके द्वारा प्रेक्षण के साथ बेहतर सहमति प्राप्त की जा सकती है।

तथापि हमारे पास, किसी गणितीय मॉडल में प्रयुक्त विभिन्न चरों के चयन तथा इन चरों के मूल्याकंन हेतु अच्छे मार्गदर्शक सिद्धांत नहीं है। वास्तव में हम पाँच या छः चरों का चयन करके किंही भी आँकड़ों के लिए बहुत हद तक यथार्थ (accurate) मॉडलों का निर्माण कर सकते हैं। इनके ठीक-ठीक मूल्यांकन हेतु हमें चरों की संख्या कम से कम रखनी चाहिए।

बृहत् अथवा जटिल परिस्थितियों के गणितीय निदर्शन की अपनी विशेष (विशिष्ट) समस्याएँ होती है। इस प्रकार की परिस्थितियाँ प्रायः पर्यावरण (environment), समुद्र विज्ञान (oceanography), जनसंख्या नियंत्रण (population control) आदि के लोक निदर्शों (world models) के अध्ययन में आती हैं। शिक्षा की सभी शाखाओं-गणित, कंप्यूटर विज्ञान, भौतिकी, अभियंत्रिकी, समाजशास्त्र आदि के गणितीय निदर्शक, इस चुनौती का सामना साहसपूर्वक कर रहे हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(ii) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(iii) स्वतुल्य और संक्रामक परंतु सममित नहीं

(iv) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(v) (a) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(b) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(c) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(d) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और लेकिन संक्रामक

(e) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

3. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

5. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

9. (i) $\{1, 5, 9\}$, (ii) $\{1\}$

12. T_1 और T_3 परस्पर संबधित हैं।

13. सभी त्रिभुजों का समुच्चय

14. सभी रेखाओं $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$ का समुच्चय

15. B

16. C

प्रश्नावली 1.2

1. नहीं

2. (i) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं (ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी

(iii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी (iv) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

(v) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

7. (i) एकैकी और आच्छादक (ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

9. नहीं **10.** हाँ **11.** D **12.** A

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

3. No **4.** $n!$ **5.** हाँ

6. A **7.** B

प्रश्नावली 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{6}$ 3. $\frac{\pi}{6}$ 4. $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ 6. $-\frac{\pi}{4}$ 7. $\frac{\pi}{6}$ 8. $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ 10. $\frac{-\pi}{4}$ 11. $\frac{3\pi}{4}$ 12. $\frac{2\pi}{3}$

13. B 14. B

प्रश्नावली 2.2

3. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ 4. $\frac{x}{2}$ 5. $\frac{\pi}{4}-x$ 6. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

7. $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ 8. $\frac{\pi}{4}$ 9. $\frac{x+y}{1-xy}$ 10. $\frac{\pi}{3}$

11. $\frac{-\pi}{4}$ 12. $\frac{17}{6}$ 13. B 14. D

15. B

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{6}$ 11. $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in z$ 12. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

13. D 14. C

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \; z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}, B-C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

7. (i) $X=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-12}{5}\\ \frac{-11}{5} & 3\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{13}{5}\\ \frac{14}{5} & -2\end{bmatrix}$

8. $X=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ **9.** $x=3, y=3$ **10.** $x=3, y=6, z=9, t=6$

11. $x=3, y=-4$ **12.** $x=2, y=4, w=3, z=1$

15. $\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -10\\ -5 & 4 & 4\end{bmatrix}$ **17.** $k=1$

19. (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

20. Rs 20160 **21.** A **22.** B

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3} & 2\\ 5 & 5 & 3\\ 6 & 6 & -1\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}$

10. (i) $A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

3. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $x = -1$ **6.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

7. (a) बाजार-I में कुल आय = Rs 46000

बाजार-II में कुल आय = Rs 53000

(b) Rs 15000, Rs 17000

8. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** C **10.** B **11.** C

प्रश्नावली 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$ **8.** (B)

प्रश्नावली 4.2

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$, (ii) $x - 3y = 0$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0, \quad M_{21} = -4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b, \quad M_{21} = c, \quad M_{22} = a$

$A_{11} = d, \quad A_{12} = -b, A_{21} = -c, \quad A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0, \quad M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6, \quad M_{13} = 3, M_{21} = -4, M_{22} = 2, M_{23} = 1, \quad M_{31} = -20, M_{32} = -13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11, \quad A_{12} = -6, A_{13} = 3, \quad A_{21} = 4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1, A_{31} = -20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x-y)(y-z)(z-x)$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.4

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

प्रश्नावली 4.5

1. संगत
2. संगत
3. असंगत
4. संगत
5. असंगत
6. संगत
7. $x = 2, y = -3$
8. $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$
9. $x = \frac{-6}{11}, y = \frac{-19}{11}$
10. $x = -1, y = 4$
11. $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$
12. $x = 2, y = -1, z = 1$
13. $x = 1, y = 2, z = -1$
14. $x = 2, y = 1, z = 3$
15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$
16. प्याज का मूल्य प्रति kg = Rs 5
    गेहूँ का मूल्य प्रति kg = Rs 8
    चावल का मूल्य प्रति kg = Rs 8

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

2. 1
3. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
5. $-2(x^3 + y^3)$
6. xy
7. $x = 2, y = 3, z = 5$
8. A
9. D

प्रश्नावली 5.1

2. $f, x = 3$ पर संतत है।
3. (a), (b), (c) और (d) सभी संतत फलन हैं।
5. $f, x = 0$ और $x = 2$ पर संतत है; परंतु $x = 1$ पर संतत नहीं है।
6. $x = 2$ पर असंतत
7. $x = 3$ पर असंतत
8. $x = 0$ पर असंतत
9. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं
10. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं
11. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं

12. $x = 1$ पर f असंतत है।
13. $x = 1$ पर f संतत नहीं है।

14. $x = 1$ और $x = 3$ पर f संतत नहीं है।

15. केवल $x = 1$ असांतत्यता का बिंदु है।

16. संतत
17. $a = b + \dfrac{2}{3}$

18. λ के किसी भी मान के लिए f, $x = 0$ पर संतत है परंतु f, λ के प्रत्येक मान के लिए $x = 1$ पर संतत है।

20. $x = \pi$ पर f संतत है।
21. (a), (b) और (c) सभी संतत फलन हैं।

22. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए cosine फलन संतत है। cosecant फलन $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। secant फलन $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। cotangent फलन, $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत हैं।

23. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

24. हाँ, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।
25. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।

26. $k = 6$
27. $k = \dfrac{3}{4}$
28. $k = \dfrac{-2}{\pi}$

29. $k = \dfrac{9}{5}$
30. $a = 2, b = 1$

34. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$
2. $-\cos x \sin(\sin x)$
3. $a \cos(ax + b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a \cos(ax + b) \sec(cx + d) + c \sin(ax + b) \tan(cx + d) \sec(cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2 \sqrt{\sin 2x^2}}$
8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

प्रश्नावली 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$
2. $\dfrac{2}{\cos y - 3}$
3. $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$
4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$
5. $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$
6. $-\dfrac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$
7. $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$
8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$
9. $\dfrac{2}{1+x^2}$
10. $\dfrac{3}{1+x^2}$
11. $\dfrac{2}{1+x^2}$
12. $\dfrac{-2}{1+x^2}$
13. $\dfrac{-2}{1+x^2}$
14. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

प्रश्नावली 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$
2. $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
3. $3x^2 e^{x^3}$
4. $-\dfrac{e^{-x} \cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}$
5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$
6. $e^x + 2x e^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$
7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}, x > 0$
8. $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$
9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x (\log x)^2}, x > 0$
10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right) \sin(\log x + e^x), x > 0$

प्रश्नावली 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\,[\tan x + 2 \tan 2x + 3 \tan 3x]$
2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x\log x}-\sin x\log(\log x)\right]$

4. $x^x(1+\log x)-2^{\sin x}\cos x\log 2$

5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2+70x+133)$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]+x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1+\log x\,.\,\log(\log x)]+2x^{\log x-1}\,.\,\log x$

8. $(\sin x)^x(x\cot x+\log\sin x)+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cos x\cot x-\sin x\log\sin x]$

10. $x^{x\cos x}[\cos x\,.\,(1+\log x)-x\sin x\log x]-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x[1-x\tan x+\log(x\cos x)]+(x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x\cot x+1-\log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1)=120$

17. $5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$

प्रश्नावली 5.6

1. t^2

2. $\dfrac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$

6. $-\cot\dfrac{\theta}{2}$

7. $-\cot 3t$

8. $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

10. $\tan\theta$

प्रश्नावली 5.7

1. 2 **2.** $380\, x^{18}$ **3.** $-x\cos x - 2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$ **5.** $x(5 + 6\log x)$ **6.** $2e^x(5\cos 5x - 12\sin 5x)$

7. $9\, e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$ **8.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$ **10.** $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\ \text{cosec}^2\, y$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $27\,(3x^2 - 9x + 5)^8\,(2x - 3)$ **2.** $3\sin x\cos x\,(\sin x - 2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}} + \dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\log(\log x)}{x}\right],\ x > 1$

8. $(a\sin x - b\cos x)\sin(a\cos x + b\sin x)$

9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x}(\cos x + \sin x)(1 + \log(\sin x - \cos x)),\ \sin x > \cos x$

10. $x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\dfrac{x^2-3}{x} + 2x\log x\right] + (x-3)^{x^2}\left[\dfrac{x^2}{x-3} + 2x\log(x-3)\right]$

12. $\dfrac{6}{5}\cot\dfrac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\dfrac{\sec^3 t}{at},\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$

प्रश्नावली 6.1

1. (a) $6\pi\ \text{cm}^2/\text{cm}$ (b) $8\pi\ \text{cm}^2/\text{cm}$

2. $\dfrac{8}{3}\ \text{cm}^2/\text{s}$ **3.** $60\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$ **4.** $900\ \text{cm}^3/\text{s}$

5. 80π cm²/s **6.** 1.4π cm/s

7. (a) -2 cm/min (b) 2 cm²/min

8. $\frac{1}{\pi}$ cm/s **9.** 400π cm³/cm **10.** $\frac{8}{3}$ cm/s

11. (4, 11) and $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π cm³/s

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ cm/s **15.** Rs 20.967

16. Rs 208 **17.** B **18.** D

प्रश्नावली 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ and $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ के लिए ह्रासमान और $x > -1$ के लिए वर्धमान

(b) $x > -\frac{3}{2}$ के लिए ह्रासमान और $x < -\frac{3}{2}$ के लिए वर्धमान

(c) $-2 < x < -1$ के लिए वर्धमान और $x < -2$ और $x > -1$ के लिए ह्रासमान

(d) $x < -\frac{9}{2}$ के लिए वर्धमान और $x > -\frac{9}{2}$ के लिए ह्रासमान

(e) (1, 3) और $(3, \infty)$, में वर्धमान तथा $(-\infty, -1)$ और $(-1, 1)$ में ह्रासमान

8. $0 < x < 1$ और $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a = -2$ **19.** D

प्रश्नावली 6.3

1. (i) निम्नतम मान = 3 (ii) निम्नतम मान = -2

(iii) उच्चतम मान = 10 (iv) न तो निम्नतम और न तो उच्चतम मान

2. (i) निम्नतम मान = -1; उच्चतम मान का अस्तित्व नहीं

(ii) उच्चतम मान = 3; निम्नतम मान का अस्तित्व नहीं

(iii) निम्नतम मान = 4; उच्चतम मान = 6

(iv) निम्नतम मान $= 2$; उच्चतम मान $= 4$

(v) न तो निम्नतम मान और न तो उच्चतम मान

3. (i) $x = 0$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 0$

(ii) $x = 1$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -2$

$x = -1$ पर स्थानीय उच्चतम , स्थानीय उच्चतम मान $= 2$

(iii) $x = \dfrac{\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम , स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \dfrac{3\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम , स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{4}$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= 19$

$x = 3$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 15$

(vi) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 2$

(vii) $x = 0$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \dfrac{1}{2}$

(viii) $x = \dfrac{2}{3}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -8$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(ii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -1$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -10$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(iv) निरपेक्ष निम्नतम मान $= 3$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 19$

6. अधिकतम लाभ = 113 इकाई

7. $x = 2$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= -39$, $x = 0$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 25$.

8. $x = \dfrac{\pi}{4}$ और $\dfrac{5\pi}{4}$ पर

9. उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ पर उच्चतम, उच्चतम मान 89; $x = -2$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 2\pi$; $x = 0$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= 0$

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 cm **18.** $x = 5$ cm

21. त्रिज्या = $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm और ऊँचाई = $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

22. $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm **27.** A **28.** D **29.** C

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

2. $b\sqrt{3}$ cm²/s

3. (i) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

4. (i) $x < -1$ और $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **6.** Rs 1000

8. लंबाई = $\frac{20}{\pi+4}$ m, चौड़ाई = $\frac{10}{\pi+4}$ m

10. (i) $x = \frac{2}{7}$ पर स्थानीय उच्चतम (ii) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम

(iii) $x = -1$ पर नत परिवर्तन बिंदु

11. निरपेक्ष उच्चतम मान = $\frac{5}{4}$, निरपेक्ष निम्नतम मान = 1

14. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **16.** A

पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 5

प्रमेय 5 (पृष्ठ 190 पर शीर्षक 'प्रमेय 5' के अंतर्गत है।)

(i) चरघातांकीय फलन $f(x) = e^x$ का अवकलज

यदि $f(x) = e^x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ है।

(ii) लघुगणकीय फलन $f(x) = \log_e x$ का अवकलज

यदि $f(x) = \log_e x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$ है।

टिप्पणी